ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, απόδειξη παρ. 1.8 σχολικό βιβλίο.

Α2. Ορισμός, παράγρ. 2.2 σχολικό βιβλίο.

Α3. (Λ)
Αντιπαράδειγμα : Η *συνάρτηση* $f(x)=x^3$, *είναι γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$
αλλά $f'(x)=3x^2\geq 0$ στο $\mathbb{R}$.

Α4. α) → Λ, β) → Σ, γ) → Σ, δ) → Σ, ε) → Σ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\mathrm{A}_f=(1,+\infty)$, $\mathrm{A}_g=\mathbb{R}$
Η *fog* ορίζεται στο σύνολο
$\mathrm{A}_{fog}=\{x\in \mathrm{A}_g \text{ ώστε } g(x)\in \mathrm{A}_f\}=\{x\in\mathbb{R} \text{ ώστε } e^x>1\}=(0,+\infty)$.

Ο τύπος της είναι: $(fog)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1},\ x>0.$

Β2. Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty):(fog)(x_1)=(fog)(x_2)\Rightarrow \dfrac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\dfrac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(e^{x_1}+2\right)\left(e^{x_2}-1\right)=\left(e^{x_2}+2\right)\left(e^{x_1}-1\right)\Rightarrow e^{x_1x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=e^{x_1x_2}-e^{x_2}+2e^{x_1}-2\Rightarrow$

$\Rightarrow 3e^{x_1}=3e^{x_2}\Rightarrow e^{x_1}=e^{x_2}\Rightarrow x_1=x_2.$

Οπότε η *fog* είναι 1-1 άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση:

$(fog)^{-1} : (fog)\big((0,+\infty)\big) \to \mathbb{R}$

Είναι $\quad y = \dfrac{e^x + 2}{e^x - 1} \Leftrightarrow ye^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow (y-1)e^x = y + 2 \qquad (1)$

Αν $y = 1$ η (1) $\Leftrightarrow 0e^x = 3$ αδύνατη, άρα $1 \notin (fog)\big((0,+\infty)\big)$

Αν $y \neq 1$ η (1) $\Leftrightarrow e^x = \dfrac{y+2}{y-1}$.

Πρέπει $\dfrac{y+2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y < -2$ ή $y > 1 \qquad (2)$

και

$x = \ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right)$ $\quad αλλά \quad x > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\dfrac{y+2}{y-1}\right) > \ln 1 \Leftrightarrow \dfrac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \dfrac{y+2-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1 \quad (3)$

Από (2), (3) τελικά $y > 1$

Έτσι: $\varphi(x) = (fog)^{-1} = \ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right), \quad x > 1$

(Δεύτερος τρόπος) : Μελετάμε τη μονοτονία της συνάρτησης fog με τη βοήθεια της παραγώγου (προκύπτει γνησίως φθίνουσα) και βρίσκουμε ως σύνολο τιμών της το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x), \lim\limits_{x\to 0}(fog)(x)\right) = (1,+\infty)$.

Β3. Για $x > 1$: $\varphi'(x) = \dfrac{x-1}{x+2}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)' = \dfrac{\cancel{x-1}}{x+2} \cdot \dfrac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 2}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \dfrac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0$

Άρα φ γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Β4. $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) \overset{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim\limits_{u\to+\infty}\ln u = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) \overset{\frac{x+2}{x-1}=u}{=} \lim\limits_{u\to 1}\ln u = \ln 1 = 0.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Η f συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών.

Η f συνεχής στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ ομοίως ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών.

Αφού είναι συνεχής η f πρέπει να είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$.

Άρα πρέπει:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = \lim_{x\to 0^+}(\text{ημ}x + \lambda\,\text{συν}x) = 1 - \ln\lambda \Leftrightarrow$$

$$1 - \ln\lambda = \lambda \Leftrightarrow \ln\lambda = 1-\lambda \Leftrightarrow \ln\lambda + \lambda - 1 = 0. \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x + x - 1 \quad , \ x > 0$ με

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \Rightarrow \varphi$ γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Από (1) είναι

$$\varphi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\lambda) = \varphi(1) \underset{\varphi(1-1)}{\overset{\varphi\ \text{γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow}} \lambda = 1.$$

Γ2 Είναι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x \le 0 \\ \text{ημ}x + \text{συν}x, & 0 < x < \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

Για $x<0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \dfrac{1-1+x}{x(1-x)} = \dfrac{1}{1-x}$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{1-x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1$

Για $x>0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\text{ημ}x + \text{συν}x - 1}{x} = \dfrac{\text{ημ}x}{x} + \dfrac{\text{συν}x - 1}{x}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\text{ημ}x}{x} + \dfrac{\text{συν}x - 1}{x}\right) = 1 + 0 = 1$, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1$

Άρα η εφαπτόμενη στο Α $(0,1)$ έχει εξίσωση:

$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$

Αν ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτόμενη με τον άξονα xx' είναι:

$\text{εφ}\omega = f'(0) \Leftrightarrow \text{εφ}\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \dfrac{\pi}{4} \quad (\omega \in [0, \pi))$..

Γ3. Για $x < 0$: $f'(x) = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{-(1-x)'}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Για $x > 0$: $f'(x) = (\text{ημ}x + \text{συν}x)' = \text{συν}x - \text{ημ}x$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \text{συν}x - \text{ημ}x, & x > 0 \end{cases}$

Για $x \le 0$ είναι $f'(x) > 0$.

Για $0 < x < \dfrac{3\pi}{2}$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}x - \text{ημ}x = 0 \Leftrightarrow \text{ημ}x = \text{συν}x$

$\overset{\text{συν}x\neq 0}{\Leftrightarrow}$ $\text{εφ}x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ή $x = \dfrac{5\pi}{4}$ αφού $x \in \left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Επειδή λοιπόν η f' ορίζεται στο $\left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ και $f'(x) = 0$ στα $x = \dfrac{\pi}{4}$ και $x = \dfrac{5\pi}{4}$, αυτά είναι και τα κρίσιμα σημεία.

Γ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M\left(\alpha, f(\alpha)\right)$ είναι $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - a)$.

Για $y = 0 \Rightarrow -f(a) = f'(a)x - af'(a) \Leftrightarrow x = \dfrac{af'(a) - f(a)}{f'(a)} = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$

Άρα το σημείο τομής της εφαπτομένης με τον άξονα $x'x$ είναι

$\mathrm{B}\left(a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}, 0\right)$

Επομένως $\mathrm{x_B} = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)} = a - \dfrac{\dfrac{1}{1-a}}{\dfrac{1}{(1-a)^2}} = a - (1-a) = 2a - 1$.

Άρα την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι:

$\mathrm{x_B}(t) = 2a(t) - 1 \Rightarrow \mathrm{x'_B}(t) = 2a'(t) \Rightarrow \mathrm{x'_B}(t) = 2\left(-\dfrac{a(t)}{3}\right) \Rightarrow \mathrm{x'_B}(t) = -\dfrac{2}{3}a(t)$ (1)

Όμως ισχύει $a(t_0) = -1$

Από (1) για $t = t_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x'_B(t_0) = -\dfrac{2}{3}a(t_0) \Rightarrow x'_B(t_0) = -\dfrac{2}{3}(-1) \Rightarrow x'_B(t_0) = \dfrac{2}{3}$ $\dfrac{\text{μονάδα μήκους}}{\text{μονάδα χρόνου}}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Είναι:

$f'(x) = e^x + 2x - e \quad x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = e^x + 2 \quad x \in \mathbb{R}$

$f''(x) > 0$ στο $\mathbb{R}$ άρα *f' γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$

Η f' στο [0, 1] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Bolzano αφού

$f'(0) = 1 - e < 0$

$f'(1) = 2 > 0$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (0,1) : f'(x_0) = 0$

Το παραπάνω είναι μοναδικό στο $\mathbb{R}$ αφού *f' γνησίως αύξουσα* στο $\mathbb{R}$.

Έτσι

$$x < x_0 \overset{f'\text{ γν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_0) = 0$$

$$x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$$

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$	min: $f(x_0)$	$\nearrow$	

Έχουμε:

$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^{\,2} - ex_0 - 1 \qquad (1)$

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 - e \Leftrightarrow e^{x_0} = e - 2x_0 \qquad (2)$

Η $(1) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^{\,2} - ex_0 - 1 = x_0^{\,2} - (e+2)x_0 + e - 1$

Δ2. Από (Δ1) για $x \neq x_0$ είναι $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) > 0$

$\lim_{x \to x_0}\left(f(x) - f(x_0)\right) = 0$ λόγω συνέχειας της f στο x_0.

Οπότε $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty \quad (3)$

Ακόμη για $x \neq x_0$ είναι:

$$\etaμ\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \etaμ\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \quad (4)$$

Από (3) $\lim_{x \to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1\right) = +\infty$

$$\overset{(4)}{\Rightarrow} \lim_{x \to x_0}\left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \etaμ\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right] = +\infty$$

Δ3 Έστω $\varphi(x) = f(x) + x - x_0, \quad x \in [x_0, 1]$

Η φ είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ ως άθροισμα συνεχών.

- $\varphi(x_0) = f(x_0)$

Όμως $x_0 < 1 \overset{(\Delta_1)}{\Rightarrow} f(x_0) < f(1) = 0 \Rightarrow \varphi(x_0) < 0$

- $\varphi(1) = f(1) + 1 - x_0 > 0$

Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $\rho \in (x_0, 1)$

Ώστε: $\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho - x_0 = 0$

Η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική στο $[x_0,1]$

Αφού $\varphi'(x)=f'(x)+1>0 \ \textit{στο}\ [x_0,1]$

$\Rightarrow \varphi$ *γνησίως αύξουσα στο* $[x_0,1]$.

Δ4. Είναι $f(\rho)+\rho=x_0$ με $\rho\in(x_0,1)$ και $x_0\in(0,1)$

Έχουμε για $\kappa\in(\rho,1)$:

$f(x_o)>f(\rho)\big(f'(\kappa)+1\big)\Leftrightarrow f(x_o)-f(\rho)>f(\rho)f'(\kappa)$

$\underset{x_0<\rho}{\overset{f(\rho)=x_0-\rho}{\Leftrightarrow}} \dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}<f'(\kappa)$ (5)

Η f στο $[x_o,\rho]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει

$\xi\in(x_0,\rho): f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}$ (6)

$(5)\overset{(6)}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(\kappa)$

Ισχύει αφού f' *γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$ και $\xi<\rho,\ \kappa\in(\rho,1)$.

Δ4. **(2ος τρόπος)**

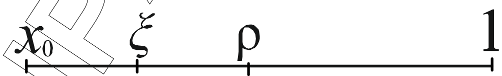
$f(x_0)>f(\rho)\big(f'(\kappa)+1\big)\Leftrightarrow f(x_0)>f(\rho)f'(\kappa)-f(\rho)\Leftrightarrow$

$f(x_0)-f(\rho)f'(\kappa)-f(\rho)>0$

Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$\varphi(x)=f(x_0)-f(\rho)f'(x)-f(\rho)$ με $x\in[\rho,1)$

είναι $\varphi(x)>0$.



Στο $[x_0,\rho]$ από ΘΜΤ υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi\in(x_0,\rho): f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(\rho)}{x_0-\rho}\Leftrightarrow f(x_0)-f(\rho)=f'(\xi)(x_0-\rho).$

Από το **Δ3.** είναι

$f(\rho)+\rho=x_0\Leftrightarrow f(\rho)=x_0-\rho<0.$

Άρα $\varphi(x)=f'(\xi)(x_0-\rho)-(x_0-\rho)f'(x)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varphi(x)=(x_0-\rho)\big(f'(\xi)-f'(x)\big)$

Είναι

$\varphi'(x)=(x_0-\rho)\big(-f''(x)\big)>0,$ αφού $x_0-\rho<0$

και $f''(x)>0\Rightarrow\varphi$ γνησίως αύξουσα στο $[\rho,1]$.

Άρα $\rho<x<1\Leftrightarrow\varphi(x)>\varphi(\rho)=(x_0-\rho)\big(f'(\xi)-f'(\rho)\big)$ (1)

Αφού $\xi<\rho\underset{f'\uparrow}{\overset{f''>0}{\Rightarrow}} f'(\xi)<f'(\rho)\Rightarrow f'(\xi)-f'(\rho)<0$

και $x_0-\rho<0\overset{(1)}{\Rightarrow}\varphi(x)>\varphi(\rho)>0\Rightarrow\varphi(x)>0.$