ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 76.

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 155.

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 216.

Α4. **α)** Σ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Λ **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad x \ge 1$$

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad x \ge 1$$

Β1. $$f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \frac{\frac{x+1}{\cancel{\sqrt{x}}}}{\frac{x-1}{\cancel{\sqrt{x}}}} = \frac{x+1}{x-1}, \qquad x > 1 \quad \left(x \in D_g \bigcap D_h - \{x \mid h(x) = 0\}\right)$$

$$r(x) = g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}, \qquad x \ge 1 \quad \left(x \in D_g \bigcap D_h\right)$$

B2. Έστω $x_1,\ x_2 \in (1, +\infty)$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x_1 x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1 x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2.}$$

Άρα η f είναι 1–1 και άρα είναι αντιστρέψιμη.

Εύρεση του τύπου της αντίστροφης:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1 \Leftrightarrow (y-1)x = y+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

Πρέπει $y \neq 1$ και

$$\frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

Άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1},\ x > 1,$

οπότε $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x > 1$

Άρα $f = f^{-1}$

B3. $r(x) = x - \dfrac{1}{x}\ ,\ x \geq 1$

<u>Κατακόρυφη Ασύμπτωτη</u>:

Η $r(x)$ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Πλάγια Ασύμπτωτη

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x^2})=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(r(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\frac{1}{x}-x)=\lim_{x\to+\infty}(-\frac{1}{x})=0$$

Άρα η ευθεία δ: y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της r(x) καθώς στο $+\infty$.

B4. Πρέπει:

- $x\in D_{f^{-1}}:\quad x>1$
- $f\left(x\right)\in D_{f^{-1}}\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-1}>1\overset{x-1>0}{\Leftrightarrow}x+1>x-1\Leftrightarrow 1>-1$ που ισχύει
- $x\in D_r\Leftrightarrow x\geq 1$. Επομένως $x>1$.

$$(\boldsymbol{f^{-1}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))^2=\boldsymbol{1}+\boldsymbol{4r}(\boldsymbol{x})\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x^2}=\boldsymbol{1}+\boldsymbol{4}(\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x}})\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x^2}=\boldsymbol{1}+\boldsymbol{4x}-\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{x}}\Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{x^3}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{4x^2}-\boldsymbol{4}\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x^3}-\boldsymbol{4x^2}-\boldsymbol{x}+\boldsymbol{4}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\ \boldsymbol{x^2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4})-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4})=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow$$

$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{4})(\boldsymbol{x^2}-\boldsymbol{1})=\boldsymbol{0}$. Προκύπτει:

$$\begin{cases}x=4\\ x=1,\ \text{απορρίπτεται}\\ x=-1,\ \text{απορρίπτεται}\end{cases}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $x_0=2$

οπότε $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)$

- $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(-2x+4+e^{\lambda})=\cancel{-4}\cancel{+4}+e^{\lambda}=e^{\lambda}$
- $\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}(-x^2+4x-3+\lambda)=4-3+\lambda=1+\lambda$
- $f(2)=1+\lambda$

Άρα $e^{\lambda}=\lambda+1$

Έχει προφανή ρίζα $\lambda = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\lambda) = e^{\lambda} - \lambda - 1$, όπου $\lambda \in R$.

$g'(\lambda) = e^{\lambda} - 1$

$g'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow e^{\lambda} \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$

λ	0	
$g'(\lambda)$	–	+
$g(\lambda)$	↘	↗

min = 0

$\forall \lambda \neq 0$ είναι $g(\lambda) > 0$.

Άρα έχει μοναδική ρίζα την $\boxed{\lambda = 0}$

Γ2. Για $0 \leq x < 2$ έχουμε:

$f'(x) = -2 < 0 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2)$

Για $x \geq 2$ έχουμε:

$f'(x) = -2x + 4 < 0 \quad \forall x > 2 \Rightarrow f$ γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

Αφού η f είναι συνεχής στο, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Στο $x_0 = 0$ η f έχει ολικό μέγιστο το $f(0) = 5$.

Γ3.

(i) Η f συνεχής στο $[0,3] \subseteq [0, +\infty)$

Η f παρ/μη στο $[0,2)$ και $(2, 3]$

Στο $x_0 = 2$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2x+4+e^{\lambda}-1-\lambda}{x-2} \overset{(\lambda=0)}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{-2x+4}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

και

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-x^2+4x-4}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x-2} = 0$$

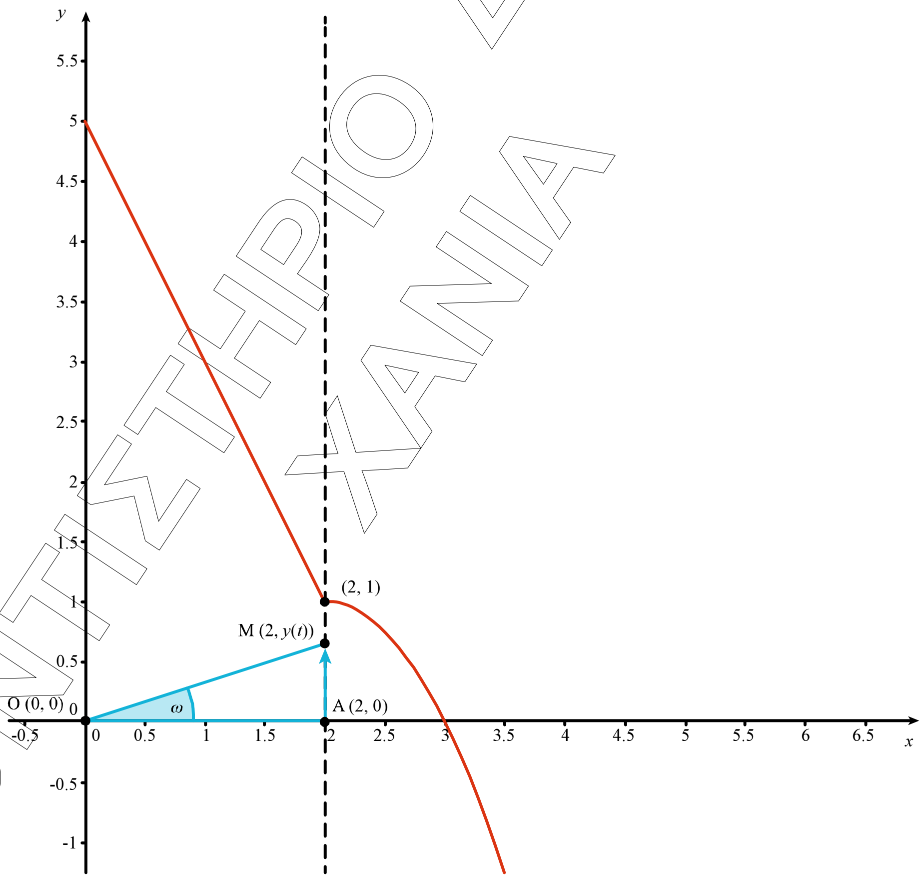
Άρα δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός $f'(2)$ και άρα δεν εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο $[0,3]$.

(ii) Αναζητούμε αν υπάρχει $\xi \in (0,3)$: $f'(\xi)=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}$

Για $\xi \in (0,2)$ πρέπει $-2=\dfrac{0-5}{3}$ άτοπο

Για $\xi \in (0,3)$ πρέπει $-2\xi+4=-\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow 2\xi=4+\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow 2\xi=\dfrac{17}{3} \Leftrightarrow \xi=\dfrac{17}{6}$.

Γ4.



$$y'(t)=\frac{1}{2}$$

$$y(t_0)=f(2)=1$$

$$\text{εφ}(\omega(t))=\frac{y(t)}{2} \Rightarrow \left(\text{εφ}(\omega(t))\right)'=\frac{1}{2}y'(t) \Leftrightarrow (1+\text{εφ}^2(\omega(t)))\,\omega'(t)=\frac{1}{2}y'(t) \Rightarrow$$

$$\overset{t=t_0}{\Rightarrow}\ (1+\text{εφ}^2(\omega(t_0)))\,\omega'(t_0)=\frac{1}{2}y'(t_0)\Rightarrow(1+\frac{1}{4})\omega'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{5}{4}\omega'(t_0)=\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\omega'(t_0)=\frac{1}{5}\ \text{rad / sec}.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x)=\frac{\ln x+\alpha x}{x},\quad x>0,\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}\text{, με } f((0,+\infty))=(-\infty,\ 1+\tfrac{1}{e}]$$

Δ1.

$$f\,'(x)=\frac{(\frac{1}{x}+a)x-(\ln x+ax)}{x^2}=\frac{1+ax-\ln x-ax}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},x>0$$

$$f\,'(x)\geq 0\Leftrightarrow 1-\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 1\Leftrightarrow x\leq e$$

x	0		e	
$f'(x)$	‖	+		−
$f(x)$	‖	↗		↘
			max	

Προκύπτει ότι έχει ολικό μέγιστο στη θέση e, το $f(e)$.

Όμως το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty,\ \ 1+\frac{1}{e}]$, άρα:

$$f(e)=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{1+ae}{e}=\frac{e+1}{e}\Leftrightarrow 1+ae=e+1\Leftrightarrow ae=e\Leftrightarrow a=1$$

Δ2. Η f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=2\ln\frac{1}{2}+1=-2\ln 2+1<0$$

(διότι $-2\ln 2+1<0\Leftrightarrow 2\ln 2>1\Leftrightarrow \ln 2>\frac{1}{2}\Leftrightarrow \ln 2>\ln\sqrt{e}\Leftrightarrow 2>\sqrt{e}$ που ισχύει)

$$f(1)=\frac{\ln 1+1}{1}=1>0$$

Άρα $f(1)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{2},\ 1\right)\subseteq(0,e]$ ώστε $f(x_0)=0$, το οποίο είναι μοναδικό στο $(0,\ e]$, αφού f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\ e]$.

$$f([e,+\infty))\overset{f\text{ γν.φθιν.}}{=}(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(e)]\overset{*}{=}(1,\ \frac{1}{e}+1]$$

Προκύπτει ότι $0\notin f([e,+\infty))$ άρα ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ρίζα της $f(x)=0$ στο $[e,+\infty)$

$$*\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+x}{x}\underset{\text{DL'H}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+1}{1}=1$$

Δ3. **i)** $f(x)=f(4)$

Προφανείς ρίζες $x_1=2,\ x_2=4$ οι οποίες είναι μοναδικές αφού f γνησίως αύξουσα στο $(0,\ e)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,\ +\infty)$.

ii) $2^x\le x^2\Leftrightarrow \ln 2^x\le \ln x^2\Leftrightarrow x\ln 2\le 2\ln x\Leftrightarrow$

$$\frac{\ln x}{x}\ge\frac{\ln 2}{2}\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}+1\ge\frac{\ln 2}{2}+1\Leftrightarrow\ f(x)\ge f(2)$$

Για $x\in(0,\ e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα οπότε $f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow x\ge 2\Leftrightarrow 2\le x\le e$

Για $x\in(e,\ +\infty)$ η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$f(x)\ge f(2)=f(4)\Leftrightarrow f(x)\ge f(4)\Leftrightarrow x\le 4\Leftrightarrow e<x\le 4.$

Τελικά $x\in[2,4]$.

Δ4. $g(x)=f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}$

$$E=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|\,dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f(e^x)\,\frac{1-x}{e^x}\right|dx$$

Θέτουμε $u=e^x\Rightarrow x=\ln u\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{1}{u}\mathrm{d}u$

Για $x=-\ln 2\Rightarrow u_1=\frac{1}{2}$

Για $x=0\Rightarrow u_2=1$

Άρα $E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\frac{1-\ln u}{u}\right|\frac{1}{u}\mathrm{d}u$

Έχουμε $\frac{1-\ln u}{u}>0\ \forall\ u\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, οπότε $E=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\right|\frac{1-\ln u}{u}\cdot\frac{1}{u}\mathrm{d}u=$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}\left|f(u)\right|\frac{1-\ln u}{u^2}\ \mathrm{d}u+\int_{x_0}^{1}\left|f(u)\right|\frac{1-\ln u}{u^2}\ \mathrm{d}u$$

Αν $x\in\left[\frac{1}{2},x_0\right]\overset{f\ \text{γν. αυξ.}}{\Rightarrow}f(x)\leq f(x_0)=0$

Αν $x\in\left[x_0,1\right]\overset{f\ \text{γν. αυξ.}}{\Rightarrow}f(x)\geq f(x_0)=0$

Άρα $E=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}-f(u)\frac{1-\ln u}{u^2}\mathrm{d}u+\int_{x_0}^{1}f(u)\frac{1-\ln u}{u^2}\mathrm{d}u$

Όμως $f'(u)=\frac{1-\ln u}{u^2}$ οπότε

$$E=\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}-f(u)f'(u)\mathrm{d}u+\int_{x_0}^{1}f(u)f'(u)\mathrm{d}u=$$

$$\left[-\frac{1}{2}f^2(u)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left[-\frac{1}{2}f^2(u)\right]_{x_0}^{1}=$$

$$-\cancel{\frac{1}{2}f^2(x_0)}^{\,0}+\frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f^2(1)-\cancel{\frac{1}{2}f^2(x_0)}^{\,0}=$$

$$=\frac{1}{2}(-2\ln 2+1)^2+\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{\left(1-\ln 4\right)^2}{2}+\frac{1}{2}\quad \tau.\mu.$$