

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις, είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

A2. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$

•

Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

A3. ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

A4. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = 2 \ln(x - 1), g(x) = \sqrt{x - 2} + 1$$

$$B1. D_f = (1, +\infty) D_g = [2, +\infty)$$

Πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$, άρα:

$$x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x - 2} + 1 \in (1, +\infty)$$

Δηλαδή $x \geq 2$ και $(\sqrt{x - 2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x - 2} > 0 \Leftrightarrow x > 2)$

άρα $D_{f \circ g} = (2, +\infty)$.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2 \ln(g(x) - 1) = 2 \ln(\sqrt{x - 2} + 1 - 1) = \\ &= 2 \ln \sqrt{x - 2} = 2 \ln(x - 2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x - 2). \end{aligned}$$

Άρα $(f \circ g)(x) = \ln(x - 2)$, για $x > 2$

$$B2. h(x) = \ln(x - 2), x > 2$$

$$h'(x) = (\ln(x - 2))' = \frac{1}{x - 2} > 0, \forall x > 2$$

Έτσι h είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, επομένως υπάρχει h^{-1}

$$D_{h^{-1}} = \Sigma T_h = h((2, +\infty)) \stackrel{h \text{ γν. αύξ.}}{=} (\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

αφού

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{\substack{u_0=0 \\ u=x-2}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{\substack{u_0=+\infty \\ u=x-2}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$

Ισχύει $h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(x)$

Έτσι $h(x) = y$, με $y \in \mathbb{R}$

$$\ln(x-2) = y$$

$$x-2 = e^y$$

$$x = e^y + 2, y \in \mathbb{R}.$$

Επομένως $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}.$

$$\text{B3. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\substack{(\frac{0}{0}) \\ \text{DLH}}}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ1. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

Αφού f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ πρέπει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

$$\text{Αν } \kappa \neq 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x.$$

- Αν $\kappa > 0$ τότε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = +\infty$, άτοπο.

- Αν $\kappa < 0$ τότε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = -\infty$, άτοπο.

Άρα είναι $\kappa = 0$, οπότε είναι $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$.

$$f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{\mu \cdot (x^2 + 1) - \mu x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2}$$

Αφού $y=x$ εφαπτομένη της Cf στο 0 (0,0) πρέπει:

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Rightarrow \mu = 1.$$

Γ2.

Έχουμε $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, D_f = \mathbb{R}$

$$i) f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	○	-
f	↘		↗	↘

- Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ η f είναι γν. φθίνουσα.
- Στο διάστημα $[-1, 1]$, f είναι γν. αύξουσα.

- στο $x_1 = -1$ γ. ελάχιστο $f(-1) = -\frac{1}{2}$

- στο $x_2 = 1$ γ. μέγιστο $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -1], \Delta_2 = (-1, 1], \Delta_3 = (1, +\infty)$

- $f(\Delta_1) = f((-\infty, -1]) \stackrel{f_{\text{γν.φθ.}}}{=} [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-\frac{1}{2}, 0)$

- $f(\Delta_2) = f((-1, 1]) \stackrel{f_{\text{γν.αύξ.}}}{=} (\lim_{x \rightarrow -1} f(x), f(1)] = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

- $f(\Delta_3) = f((1, +\infty)) \stackrel{f_{\text{γν.φθ.}}}{=} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (0, \frac{1}{2})$

Άρα $\Sigma. T. f = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

iii) $f(x) = \frac{1}{2} + a^2, a \in \mathbb{R}$:

Αφού $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $a^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

- $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο Δ_1 .

- $a^2 + \frac{1}{2} \in f(\Delta_2)$ (για $a = 0$) άρα η εξίσωση έχει 1 μόνο ρίζα στο Δ_2 την $x = 1$ (αφού f γν. αύξουσα στο Δ_2).

- $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_3)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο Δ_3 .

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχει 1 ΜΟΝΟ ρίζα την $x = 1$.

Γ3. $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$

i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx =$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx =$$

$$= \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - 0 \Rightarrow$$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2} \quad (1)$$

ii) $I_0 \stackrel{\nu=0}{=} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \stackrel{\substack{du=2xdx \\ u=x^2+1}}{=} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{u} du =$

$$= \frac{1}{2} [\ln|u|]_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

(1) $\xrightarrow{\nu=0} I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

$$I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

(1) $\xrightarrow{\nu=1} I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1 - 2 + 2 \ln 2}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{2 \ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

g παραγωγίσιμη, g' συνεχής

$$0 < g(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Έστω $h(x) = g(x) + x$

Η $h(x)$ συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών

$$h(-1) = g(-1) - 1 < 0$$

$$h(0) = g(0) > 0$$

$$h(0) \cdot h(1) < 0$$

Από Θ. Bolzano, υπάρχει $x_1 \in [-1, 0]: h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

$$h'(x) = g(x) + 1 \neq 0$$

και h' συνεχής, άρα η h' διατηρεί πρόσημο.

Άρα η h γνησίως μονότονη, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

$$\Delta 2. f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x(g(x) + x)) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right) \right) \\ &= 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } 3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

Δ3.

Για $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ είναι: $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$.

Θα δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$, στο $[0, \frac{\pi}{2})$. Πράγματι :

$$f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 - \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot 2 \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2})}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{2(\sin x - 1)^2 \cdot (\sin x + \frac{1}{2})}{\sin^2 x} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, \frac{\pi}{2}), \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x=0.$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$

$$\text{Για } x \geq 0 \stackrel{\text{f γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$$

ii) Έχουμε την εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$

$$\Sigma.Τ.{}_f = f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \stackrel{\text{f γν. αυξ.}}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = 2 \cdot 1 + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$$

και αφού $\frac{\pi}{3} \in \Sigma.Τ.{}_f$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2})$

Άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Δ4. i) Έστω $h(x) = g(x) + x$.

$$\text{Τότε } h(0) = g(0) > 0 \text{ και } h(x_1) = g(x_1) + x_1 = 0$$

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ αφού h' συνεχής. Άρα η $h'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Αν $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ γν. φθίνουσα, οπότε

$$x_1 < 0 \stackrel{\text{h γν. φθ.}}{\Rightarrow} h(x_1) > h(0) = g(0) > 0 \Rightarrow 0 > 0. \text{ Άτοπο}$$

Άρα $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γν. αύξουσα. Τότε για $x \in [x_1, 0]$ είναι $x \geq x_1 \stackrel{\text{h γν. αυξ.}}{\Rightarrow}$

$$h(x) \geq h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x) + x \geq 0 \text{ και αφού } x^2 > 0 \text{ έπεται}$$

$$x^2(g(x) + x) \geq 0 \text{ στο } [x_1, 0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \text{ στο } [x_1, 0).$$

$$\text{ii) } E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} f(x) dx \text{ με } f(x_2) = \frac{\pi}{3} \text{ και } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, \frac{\pi}{3}].$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \text{ και ισχύει } \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx &= [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx = \\ &= -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^0 3 \cdot (f(x) - x^3) dx = x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + \int_{x_1}^0 3x^3 dx \\ &= x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + 3 \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + 3 \frac{x_1^4}{4} \\ &= \frac{x_1^4}{4} - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx \stackrel{(1)}{=} \frac{x_1^4}{4} - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Όμως :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{Άρα } \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2}.$$