

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1. ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Πράγματι

- Αν  $x_1 = x_2$ , τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το  $\xi$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , ισχύει  $f'(\xi) = 0$ , οπότε, λόγω της (1), είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ . Αν  $x_2 < x_1$ , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις, είναι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

**A2. ΘΕΩΡΗΜΑ**

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$ . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$
- Τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ .

### A3. ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$  ονομάζεται κάθε συνάρτηση  $F$  που είναι παραγωγίσιμη στο  $\Delta$  και ισχύει:  $F'(x) = f(x)$ , για κάθε  $x \in \Delta$ .

A4. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

### ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = 2 \ln(x-1), g(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

**B1.**  $D_f = (1, +\infty) D_g = [2, +\infty)$

Πρέπει  $x \in D_g$  και  $g(x) \in D_f$ , άρα:

$$x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} + 1 \in (1, +\infty)$$

Δηλαδή  $x \geq 2$  και  $(\sqrt{x-2} + 1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2)$

άρα  $D_{f \circ g} = (2, +\infty)$ .

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2 \ln(g(x) - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = \\ &= 2 \ln \sqrt{x-2} = 2 \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2). \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (f \circ g)(x) = \ln(x-2), \text{ για } x > 2$$

**B2.**  $h(x) = \ln(x-2), x > 2$

$$h'(x) = (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2} > 0, \forall x > 2$$

Έτσι  $h$  είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, επομένως υπάρχει  $h^{-1}$

$$D_{h^{-1}} = \Sigma T_h = h((2, +\infty)) \stackrel{\text{h γν. αύξ.}}{=} (\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

αφού

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{u_0=0}{u=x-2} = \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{u_0=+\infty}{u=x-2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$

Ισχύει  $h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(x)$

Έτσι  $h(x) = y$ , με  $y \in \mathbb{R}$

$$\ln(x-2) = y$$

$$x-2 = e^y$$

$$x = e^y + 2, y \in \mathbb{R}.$$

Επομένως  $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{B3. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{DLH} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( h(x) \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = (-\infty) \cdot 2 = -\infty$$

### ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ1. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

Αφού  $f$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  πρέπει  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

$$\text{Αν } \kappa \neq 0 : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x.$$

- Αν  $\kappa > 0$  τότε :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = +\infty$ , άτοπο.
- Αν  $\kappa < 0$  τότε :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = -\infty$ , άτοπο.

Άρα είναι  $\kappa = 0$ , οπότε είναι  $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$ .

$$f'(x) = \left( \frac{\mu x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{\mu \cdot (x^2 + 1) - \mu x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2}$$

Αφού  $y=x$  εφαπτομένη της Cf στο 0 (0,0) πρέπει:

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Rightarrow \mu = 1.$$

**Γ2.**

Έχουμε  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, D_f = \mathbb{R}$

$$i) f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	○	-
$f$	↘	↗	↘	

- Σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, -1]$  και  $[1, +\infty)$  η  $f$  είναι γν. φθίνουσα.
- Στο διάστημα  $[-1, 1]$ ,  $f$  είναι γν. αύξουσα.

- στο  $x_1 = -1$  τ. ελάχιστο  $f(-1) = -\frac{1}{2}$

- στο  $x_2 = 1$  τ. μέγιστο  $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Έστω  $\Delta_1 = (-\infty, -1], \Delta_2 = (-1, 1], \Delta_3 = (1, +\infty)$

- $f(\Delta_1) = f((-\infty, -1]) \stackrel{f_{\text{γν.φθ.}}}{=} [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = [-\frac{1}{2}, 0)$

- $f(\Delta_2) = f((-1, 1]) \stackrel{f_{\text{γν.αύξ.}}}{=} (\lim_{x \rightarrow -1} f(x), f(1)] = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

- $f(\Delta_3) = f(1, +\infty) \stackrel{f_{\text{γν.φθ.}}}{=} (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (0, \frac{1}{2})$

Άρα  $\Sigma.T.f = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

iii)  $f(x) = \frac{1}{2} + a^2, a \in \mathbb{R}$ :

Αφού  $a \in \mathbb{R}$  ισχύει  $a^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

- $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_1)$  άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο  $\Delta_1$ .

- $a^2 + \frac{1}{2} \in f(\Delta_2)$  (για  $a = 0$ ) άρα η εξίσωση έχει 1 μόνο ρίζα στο  $\Delta_2$  την  $x = 1$  (αφού  $f$  γν. αύξουσα στο  $\Delta_2$ ).

- $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_3)$  άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο  $\Delta_3$ .

Επομένως η εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$  έχει 1 ΜΟΝΟ ρίζα την  $x = 1$ .

Γ3.  $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$

i)  $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx =$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx =$$

$$= \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[ \frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - 0 \Rightarrow$$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2} \quad (1)$$

ii)  $I_0 \stackrel{\nu=0}{=} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \stackrel{\substack{du=2xdx \\ u=x^2+1}}{=} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{u} du =$

$$= \frac{1}{2} [\ln|u|]_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$(1) \xrightarrow{\nu=0} I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$$

$$(1) \xrightarrow{\nu=1} I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1-\ln 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1-2+2\ln 2}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$$

### ΘΕΜΑ Δ

$g$  παραγωγίσιμη,  $g'$  συνεχής

$$0 < g(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δ1. Έστω  $h(x) = g(x) + x$

Η  $h(x)$  συνεχής στο  $[-1,0]$  ως άθροισμα συνεχών

$$h(-1) = g(-1) - 1 < 0$$

$$h(0) = g(0) > 0$$

$$h(0) \cdot h(1) < 0$$

Από Θ. Bolzano, υπάρχει  $x_1 \in [-1, 0]: h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

$$h'(x) = g(x) + 1 \neq 0$$

και  $h'$  συνεχής, άρα η  $h'$  διατηρεί πρόσημο.

Άρα η  $h$  γνησίως μονότονη, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

$$\Delta 2. f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x(g(x) + x)) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta\mu x + \epsilon\phi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 2\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right) \right) \\ &= 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } 3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

**Δ3.**

Για  $x \in [0, \frac{\pi}{2})$  είναι  $f(x) = 2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x$ .

Θα δείξουμε ότι  $f(x) \geq 0$ , στο  $[0, \frac{\pi}{2})$ . Πράγματι :

$$f \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 - \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot 2 \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2})}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{2(\sin x - 1)^2 \cdot (\sin x + \frac{1}{2})}{\sin^2 x} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, \frac{\pi}{2}), \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x=0.$$

Άρα  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $[0, \frac{\pi}{2})$

$$\text{Για } x \geq 0 \stackrel{\text{f γν. αυξ.}}{\Rightarrow} f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$$

ii) Έχουμε την εξίσωση  $f(x) = \frac{\pi}{3}$

$$\Sigma.Τ.{}_f = f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \stackrel{\text{f γν. αυξ.}}{=} \left[ f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = 2 \cdot 1 + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$$

και αφού  $\frac{\pi}{3} \in \Sigma.Τ.{}_f$  και  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $[0, \frac{\pi}{2})$

Άρα η εξίσωση  $f(x) = \frac{\pi}{3}$  έχει μία μόνο ρίζα, την  $x_2 \in [0, \frac{\pi}{2})$ .

**Δ4. i)** Έστω  $h(x) = g(x) + x$ .

$$\text{Τότε } h(0) = g(0) > 0 \text{ και } h(x_1) = g(x_1) + x_1 = 0$$

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$  αφού  $h'$  συνεχής. Άρα η  $h'(x)$  διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Αν  $h'(x) < 0 \Rightarrow h$  γν. φθίνουσα, οπότε

$$x_1 < 0 \stackrel{\text{h γν. φθ.}}{\Rightarrow} h(x_1) > h(0) = g(0) > 0 > 0. \text{ Άτοπο}$$

Άρα  $h'(x) > 0 \Rightarrow h$  γν. αύξουσα. Τότε για  $x \in [x_1, 0]$  είναι  $x \geq x_1 \stackrel{\text{h γν. αυξ.}}{\Rightarrow}$

$$h(x) \geq h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x) + x \geq 0 \text{ και αφού } x^2 > 0 \text{ έπεται}$$

$$x^2(g(x) + x) \geq 0 \text{ στο } [x_1, 0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \text{ στο } [x_1, 0).$$

$$\text{ii) } E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} f(x) dx \text{ με } f(x_2) = \frac{\pi}{3} \text{ και } f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_1, \frac{\pi}{3}].$$

$$\text{Άρα } E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \text{ και ισχύει } \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx &= [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx = \\ &= -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^0 3 \cdot (f(x) - x^3) dx = x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + \int_{x_1}^0 3x^3 dx \\ &= x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + 3 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 = x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx - 3 \frac{x_1^4}{4} \\ &= \frac{x_1^4}{4} - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx \stackrel{(1)}{=} \frac{x_1^4}{4} - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx. \end{aligned}$$

Όμως :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) dx = \left[ -2\sigma\upsilon\nu x - \ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} - 3 \left( 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{x_1^4}{4} - 3 + 3 \ln 2 + \frac{\pi^2}{2}.$$