

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
 $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$
- Τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

A3. ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ⁽¹⁾ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

A4. α) Λ, β) Σ, γ) Σ, δ) Σ, ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = 2 \ln(x-1) \quad g(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

B1. $D_f(1, +\infty)$ $D_g[2, +\infty)$

Πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$$x \in [2, +\infty) \quad \sqrt{x-2} + 1 \in (1, +\infty)$$

$$\sqrt{x-2} + 1 > 1$$

$$\sqrt{x-2} > 0$$

$$x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

άρα $D_{f \circ g} = (2, +\infty)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2 \ln(g(x)-1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1)$$

$$(f \circ g)(x) = 2 \ln \sqrt{x-2} = 2 \ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(x-2).$$

Άρα $(f \circ g)(x) = \ln(x-2)$, για $x > 2$

B2. Έχω $h(x) = \ln(x-2)$, $x > 2$

$$h'(x) = (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2} > 0, \quad \forall x > 2$$

Έτσι h γνήσιως αύξουσα, άρα h 1-1 επομένως υπάρχει h^{-1}

$$D_{h^{-1}} = \Sigma T_h = h((2, +\infty)) \stackrel{\text{h γν. αύξ.}}{=} (\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)) = \mathbb{R}$$

Αφού

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) = \lim_{\substack{u=x-2 \\ u_0=0 \quad u \rightarrow 0}} \ln u = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) = \lim_{\substack{u=x-2 \\ u_0=+\infty \quad u \rightarrow +\infty}} \ln u = +\infty$$

Ισχύει $h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(x)$

Έτσι $h(x) = y$, με $y \in \mathbb{R}$

$$\ln(x-2) = y$$

$$x-2 = e^y$$

$$x = e^y + 2, y \in \mathbb{R} .$$

Επομένως $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$

$$\text{B3. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = (\infty) \cdot 2 = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Γ1. } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

Αφού f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$$

Πρέπει

$$\text{Αν } \kappa \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \kappa \cdot (+\infty) = +\infty \notin \mathbb{R}$$

που είναι άτοπο

$$\text{Πρέπει } \kappa = 0 \text{ έτσι } f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$$

$$\text{Έχουμε } f'(x) = \left(\frac{\mu x}{x^2 + 1} \right)' = \frac{\mu \cdot (x^2 + 1) - \mu x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\mu x^2 + \mu - 2\mu x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\mu x^2 + \mu}{(x^2 + 1)^2}$$

Αφού $y=x$ εφαπτομένη της Cf στο 0 (0,0) πρέπει:

$$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Rightarrow \mu = 1$$

Γ2.

$$\text{Έχουμε } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$i) f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
F'(x)	-		+	-
F	↘		↗	↘

- $x \in (-\infty, -1]$ και $x \in [1, +\infty)$ f γν. φθίν.
- $x \in [-1, 1]$ f γν. αύξ.

- στο $x_1 = -1$ τ. ελάχιστο $f(-1) = -\frac{1}{2}$

- στο $x_2 = 1$ τ. μέγιστο $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -1]$, $\Delta_2 = (-1, 1]$, $\Delta_3 = (1, +\infty)$

- $f(\Delta_1) = f((-\infty, -1]) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} [f(-1), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)] = \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$

- $f(\Delta_2) = f((-1, 1]) \stackrel{f \text{ γν. αύξ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -1} f(x), f(1)\right] = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

- $f(\Delta_3) = f((1, +\infty)) \stackrel{f \text{ γν. φθ.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Άρα Σ.Τ. $f = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

iii) Εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + a^2$, $a \in \mathbb{R}$

αφού $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $a^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

- $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο Δ_1 .

- $a^2 + \frac{1}{2} \in f(\Delta_2)$ (για $a = 0$) άρα η εξίσωση έχει 1 μόνο ρίζα στο Δ_2 την $x = 1$ (αφού f γν. αύξουσα στο Δ_2).

- $a^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_3)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο Δ_3 .

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχει 1 ΜΟΝΟ ρίζα την $x \in 1$.

$$\Gamma 3. \quad I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx$$

$$i) \quad I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1} dx =$$

$$= \int_0^1 x^{2\nu+1} dx = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - 0 \Rightarrow$$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2} \quad (1)$$

$$ii) \quad I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx \stackrel{u=x^2+1}{du=2xdx} = \int_1^2 \frac{1}{2u} du =$$

$$= \frac{1}{2} [\ln|u|]_1^2 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$(1) \xrightarrow{\nu=0} I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_1 = \frac{1 - \ln 2}{2}$$

$$(1) \xrightarrow{\nu=1} I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1 - \ln 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1 - 2 + 2 \ln 2}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{2 \ln 2 - 1}{4}$$

ΓΡΑΜ Δ

g παρ. g' συνεχ.

$$0 < g(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g'(x) \neq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δ. Θεωρ. $h(x) = g(x) + x$

h συνεχ. σε $[-1, 0]$ και $[0, 1]$ συνε.

$$h(-1) = g(-1) < 0 \quad \left. \vphantom{h(-1)} \right\} \Rightarrow h(-1) \cdot h(0) < 0$$

$$h(0) = g(0) > 0$$

Από το Βελιανό $\exists x \in (-1, 0) \quad h(x) = 0 \Rightarrow$

$$g(x) + x = 0$$

(*1) $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ και συνεχ.

Αρα η h' διατηρεί πρόσημο

Αρα η h γνυσίως μονότονη,
Επομένως η ρίζα είναι μοναδική

&

ΕΝΑ

$$\Delta_2. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 (g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta x + \epsilon x - kx & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x (g(x) + x)) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\eta x + \epsilon x - kx}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[2 \left(\frac{\eta x}{x} + \frac{\epsilon x}{x} - k \right) \right] =$$

$$= 2 + \epsilon - k = 3 - k$$

$$\text{Apa } 3 - k = 0 \Rightarrow k = 3.$$

ENA &

Δ3 $f(x) = 2gx + \frac{1}{g^2x} - 3x, \quad x \in (\frac{0}{2})$

(i) $f'(x) = 2gx + \frac{1}{g^2x} - 3 = \frac{2g^3x - 3g^2x + 1}{g^2x} =$

$= \frac{2g^2x(gx - 1) + (1 - 3gx)(1 + gx)}{g^2x}$

$= \frac{(1 - 3gx)(-2g^2x + gx + 1)}{g^2x}$

$= \frac{-2(1 - 3gx)(gx - 2)(gx + 1)}{g^2x} > 0$

$\forall x \in (0, \frac{1}{2})$

onde $\begin{cases} 1 - 3gx > 0 \\ gx - 2 < 0 \\ gx + 1 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) > f(0) = 0$

(ii) $f \left(\left[0, \frac{0}{2} \right) \right) \stackrel{\uparrow}{=} \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{0}{2}} f(x) \right)$

$= [0, +\infty)$

$\tau_0 \frac{0}{3} \in f \left(\left[0, \frac{0}{2} \right) \right)$

$\forall x_2 \in (0, \frac{0}{2}), f(x_2) = \frac{0}{3}$ por isso

$x_2 \in f \uparrow$

ENA

Δ4 (i) Ο έστω $h(x) = g(x) + x$

$$\text{Τότε } h(0) = g(0) > 0$$

$$h(x_1) = g(x_1) + x_1 = 0$$

και $h'(x_1) = g'(x_1) + 1 \neq 0$ και άρα h' συνεχής

Από h' $h'(x_1)$ διαφέρει από 0 οπότε

Αν $h'(x_1) < 0 \Rightarrow h \downarrow$ κατά ϵ

$$\text{Εκεί } x_1 < 0 \stackrel{h \downarrow}{\Rightarrow} h(x_1) > h(0) = g(0) > 0 \text{ οπότε}$$

Από $h'(x_1) > 0 \Rightarrow h \uparrow$ κατά ϵ

για $x \in [x_1, 0]$ $\text{Εκεί } x \geq x_1 \stackrel{h \uparrow}{\Rightarrow}$

$$h(x) \geq h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x) + x \geq 0$$

και $x^2 > 0$ Εκεί

$$x^2 (g(x) + x) \geq 0 \text{ οπότε } [x_1, 0] = I$$

$$F(x) \geq 0 \text{ οπότε } [x_1, 0]$$

ΕΝΑ &

Δ4 (11)

$$E_{xw} = F(0) \int_{x_1}^{F(x_2)} |f(x)| dx$$

και $F(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$ και $f(x) > 0$ για $x \in [x_1, \frac{D}{3}]$

$$A_{pa} = F(\varepsilon) = \int_{x_1}^{\frac{D}{3}} f(x) dx$$

και ισχύει $\int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_0^{\frac{D}{3}} f(x) dx$ ①

$$E_{xw} = \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 3x^2 g(x) dx$$

$$= -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^0 3(x^3 - x^3) dx =$$

$$-x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + \int_{x_1}^0 3x^3 dx$$

$$= -x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx + 3 \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0$$

$$= -x_1^4 - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx - 3 \frac{x_1^4}{4}$$

$$= -\frac{x_1^4}{4} - 3 \int_{x_1}^0 f(x) dx \quad \text{②}$$

$$\frac{x_1^4}{4} - 3 \int_0^{\frac{D}{3}} f(x) dx$$

$$E_{xw} = \int_0^{\frac{n}{3}} f(x) dx - \int_0^{\frac{n}{3}} (2nx + \epsilon_9x - 3x) dx$$

$$= \left[-2\epsilon_9x - \ln(\epsilon_9x) - \frac{3x^2}{2} \right]_0^{\frac{n}{3}}$$

$$= -2 \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{2} - \frac{n^2}{6} + 2$$

$$= 1 + \ln 2 - \frac{n^2}{6}$$

$$V_{p2} = \int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx - 3 \left(1 + \ln 2 - \frac{n^2}{6} \right)$$

$$= \frac{x^4}{4} \Big|_{x_1}^0 - 3 \ln 2 + \frac{n^2}{2}$$

ENA &