ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ. 65 σχολικού βιβλίου

$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = 1$**,** αφού

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_\kappa = \frac{\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} = 1.$$

Α2. Ορισμός σελ. 87 σχολικού βιβλίου:

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

Α3. Ορισμός σελ. 27 σχολικού βιβλίου:

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, και Β το σύνολο των x ∈ A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε x ∈ B αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h \to \infty} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος** (derivative) **της f και συμβολίζεται με f'**.

Α4.
α. Λ
β. Σ
γ. Σ
δ. Λ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $f'(x) = \left(\dfrac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 1\right)' = \dfrac{1}{\cancel{3}}\cancel{3}x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3$

Β2. Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = -1$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f'	$+$	0 $-$	0 $+$	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
		Τ.Μ.	Τ.Ε.	

Η f είναι γν. αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$, $A_3 = [3, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $A_2 = [-1, 3]$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -1$, το

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3\cdot(-1) + 1 = -\frac{1}{3} - \cancel{1} + 3 + \cancel{1} = \frac{8}{3}$$

και τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 3$, το

$$f(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 3^2 - 3\cdot 3 + 1 = \frac{27}{3} - 9 - 9 + 1 = -8$$

Β3. Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$, (1) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Έχουμε $\lambda = f'(0) = 0^2 - 2\cdot 0 - 3 = -3$ και $y = f(0) = \frac{1}{3}\cdot 0^3 - 0^2 - 3\cdot 0 + 1 = 1$,

συνεπώς η σχέση (1) δίνει $1 = -3\cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$

Άρα $\boxed{(\varepsilon): y = -3x + 1}$

Β4. $$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1}(x-3) = -4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{23+\kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23 + \kappa = 28 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 5}$$

Για $\kappa = 5$: $\quad 4, 5, 4, 5, 0, 3, 7 \xrightarrow{\text{αύξουσα σειρά}}$

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 3, & 4, & 4, & 5, & 5, & 7, \\ = & = & = & = & = & = & = \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \end{array}$$

Γ2. Έχουμε $\nu = 7$ (περιττός), άρα $\delta = x_{\frac{7+1}{2}} = x_{\frac{8}{2}} = x_4 = 4$

Γ3. $$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{7}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{7} = \frac{(0-4)^2 + (3-4)^2 + \overset{0}{\cancel{(4-4)}}^2 + \overset{0}{\cancel{(4-4)}}^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2}{7}$$

$$= \frac{16+1+1+1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Γ4. Υπολογίσαμε $s_2 = 4 \overset{s>0}{\Rightarrow} s = 2.$

Άρα $CV = \frac{s}{|\overline{x}|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ ή $50\% > 10\%$, άρα, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές,

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $\mathrm{E} = 100 \Leftrightarrow x \cdot y = 100 \overset{x,y>0}{\Leftrightarrow} \boxed{y = \frac{100}{x}}$ (1)

Συνεπώς, $\Pi = 2x + 2y \overset{(1)}{\Rightarrow} \Pi(x) = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}, \quad x > 0$

Δ2. $$\Pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x}\right)' = 2 \cdot 1 - 200 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{1} - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} =$$

$$= \frac{2\left(x^2 - 100\right)}{x^2}, \quad x > 0$$

Θέτουμε $\Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \boxed{x = 10}$

x	0	10	$+\infty$
Π'	$-$	0	$+$
Π	$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$

Άρα, Π: γνησίως φθίνουσα στο $\mathrm{A}_1 = (0,\ 10]$, γν. αύξουσα στο $\mathrm{A}_2 = [10, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 10$, την $\Pi_{\min}(10) = 2 \cdot 10 + \frac{200}{10} = 40$ cm

Όταν $x = 10$ και $y = \frac{100}{10} = 10$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο πλευράς 10 cm.

Δ3. $\cdot x_1 < x_2 \overset{\Pi:\downarrow A_1=(0,10]}{\Rightarrow} \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Leftrightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0$.

Επιπλέον, $x_1 - x_2 < 0$ άρα $A = \dfrac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

Δ4. $$\lim_{x\to 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x}-1} = \lim_{x\to 10} \frac{\dfrac{2(x^2-100)}{x^2}}{\sqrt{10x}-1} =$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{2(x^2-100)}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 10} \frac{2(x-10)(x-10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\left(\sqrt{10x}-10\right)\left(\sqrt{10x}+10\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{2(x+10)(x-1)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\left(\sqrt{10x}^2-10^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{2(x+10)(x-10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{x^2\cdot(10x-100)} =$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{2(x+10)\cancel{(x-10)}^2\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10x^2\cancel{(x-10)}} =$$

$$= \lim_{x\to 10} \frac{2(x+10)\left(\sqrt{10x}+10\right)}{10x^2} = \frac{2\cdot(10+10)\left(\sqrt{10\cdot 10}+10\right)}{10\cdot 10^2} =$$

$$= \frac{40\cdot 20}{1000} = \frac{8\cancel{00}}{10\cancel{00}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$