

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελ. 65 σχολικού βιβλίου

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1, \text{ αφού}$$

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \dots + \frac{v_k}{v} = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_k}{v} = \frac{v}{v} = 1.$$

A2. Ορισμός σελ. 87 σχολικού βιβλίου:

Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι περιττός αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το n είναι άρτιος αριθμός.

A3. Ορισμός σελ. 27 σχολικού βιβλίου:

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) **παράγωγος (derivative) της f και συμβολίζεται με f' .**

- A4.**
- α. Λ
 - β. Σ
 - γ. Σ
 - δ. Λ
 - ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 1 \right)' = \frac{1}{3} \cancel{x^2} - 2x - 3 = x^2 - 2x - 3$

B2. Θέτουμε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -1$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
f'	$+$	$\circ$	$\circ$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

T.M.

T.E.

Η f είναι γν. αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, -1]$, $A_3 = [3, +\infty)$ και γν. φθίνουσα στο $A_2 = [-1, 3]$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -1$, το

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 1 = \frac{8}{3}$$

και τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 3$, το

$$f(3) = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 = \frac{27}{3} - 9 - 9 + 1 = -8$$

B3. Έστω $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$, (1) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

Έχουμε $\lambda = f'(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3$ και $y = f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 = 1$,

συνεπώς η σχέση (1) δίνει $1 = -3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \boxed{\beta = 1}$

Άρα $\boxed{(\varepsilon): y = -3x + 1}$

B4.
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε $\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{4+5+4+\kappa+0+3+7}{7} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{23+\kappa}{7} = 4 \Leftrightarrow 23+\kappa = 28 \Leftrightarrow \boxed{\kappa = 5}$$

Για $\kappa = 5$: $4, 5, 4, 5, 0, 3, 7 \xrightarrow{\text{αύξουσα σειρά}}$

$0, 3, 4, 4, 5, 5, 7,$

$= = = = = = =$

$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7$

Γ2. Έχουμε $v = 7$ (περιπτώς), άρα $\delta = x_{\frac{7+1}{2}} = x_{\frac{8}{2}} = x_4 = 4$

Γ3.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})^2}{7} = \frac{(0-4)^2 + (3-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{7} = \frac{16+1+1+1+9}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Γ4. Υπολογίσαμε $s_2 = 4 \xrightarrow{s>0} s = 2$.

Άρα $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,5$ ή $50\% > 10\%$, άρα, το δείγμα δεν είναι ομοιογενές,

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $E = 100 \Leftrightarrow x \cdot y = 100 \Leftrightarrow y = \frac{100}{x}$ (1)

Συνεπώς, $\Pi = 2x + 2y \xrightarrow{(1)} \Pi(x) = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$, $x > 0$

$$\Delta 2. \quad \Pi'(x) = \left(2x + \frac{200}{x} \right)' = 2 \cdot 1 - 200 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{1} - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2} = \frac{2(x^2 - 100)}{x^2}, \quad x > 0$$

$$\Thetaέτουμε \Pi'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \xrightarrow{x>0} x = 10$$

x	0	10	$+\infty$
Π'	-	0	+
Π			

O.E.

Άρα, Π : γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (0, 10]$, γν. αύξουσα στο $A_2 = [10, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 10$, την $\Pi_{\min}(10) = 2 \cdot 10 + \frac{200}{10} = 40$ cm

Όταν $x = 10$ και $y = \frac{100}{10} = 10$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

είναι τετράγωνο πλευράς 10 cm.

$$\Delta 3. \quad \cdot x_1 < x_2 \quad \stackrel{\Pi: \downarrow A_1 = (0,10]}{\Rightarrow} \quad \Pi(x_1) > \Pi(x_2) \Leftrightarrow \Pi(x_1) - \Pi(x_2) > 0.$$

$$\text{Επιπλέον, } x_1 - x_2 < 0 \text{ άρα } A = \frac{\Pi(x_1) - \Pi(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

$$\begin{aligned} \Delta 4. \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\Pi'(x)}{\sqrt{10x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{\frac{2(x^2 - 100)}{x^2}}{\sqrt{10x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x^2 - 100)}{x^2(\sqrt{10x} - 10)} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x-10)(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(\sqrt{10x}-10)(\sqrt{10x}+10)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(x-1)(\sqrt{10x}+10)}{x^2(\sqrt{10x}^2 - 10^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(x-10)(\sqrt{10x}+10)}{x^2 \cdot (10x - 100)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(x-10)(\sqrt{10x}+10)}{10x^2(x-10)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 10} \frac{2(x+10)(\sqrt{10x}+10)}{10x^2} = \frac{2 \cdot (10+10)(\sqrt{10 \cdot 10} + 10)}{10 \cdot 10^2} = \\ &= \frac{40 \cdot 20}{1000} = \frac{800}{1000} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$