ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$

Έχουμε $F(x+h)-F(x)=\big(f(x+h)+g(x+h)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)=$

$$=\big(f(x+h)-f(x)\big)+\big(g(x+h)-g(x)\big)$$

και για $h\neq 0$: $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$

$=f'(x)+g'(x)$

Άρα $\big(f(x)+g(x)\big)'=f'(x)+g'(x)$.

(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 31)

Α2. **α)** Συχνότητα ν_i ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.
(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 65)

β) $\bar{x}=\dfrac{x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_\nu w_\nu}{w_1+w_2+\ldots+w_\nu}=\dfrac{\sum_{i=1}^{\nu}x_iw_i}{\sum_{i=1}^{\nu}w_i}$

(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 87)

Α3. **α)** **ΛΑΘΟΣ**
β) **ΛΑΘΟΣ**
γ) **ΣΩΣΤΟ**
δ) **ΣΩΣΤΟ**

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΧΑΝΙΑ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3},\ x \in \mathbb{R}$$

Β1. $f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(x^3\right)' - 3\left(x^2\right)' + 5\left(x\right)' + \cancel{\left(\frac{1}{3}\right)'}^{\,0} =$

$\frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}} - 6x + 5 = x^2 - 6x + 5$

Β2. $f'(x) = x^2 - 6x + 5$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 36 - 20 = 16.$

$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2}$ ↗ 5, ↘ 1

Η $f'(x) = x^2 - 6x + 5$ έχει 2 ρίζες, την $x_1 = 5$ και τη $x_2 = 1$.

x		1		5	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, 1\right]$ και $\left[5, +\infty\right)$, ενώ γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [1, 5].

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = \frac{1}{3} - 3 + 5 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 5$, το $f(5) = \frac{1}{3}\cdot 125 - 3\cdot 25 + 5\cdot 5 + \frac{1}{3} = \frac{126}{3} - 50 = -\frac{24}{3} = -8.$

Β3. Η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο $y = \lambda \cdot x + \beta$ όπου λ είναι η πρώτη παράγωγος στο $x_0 = 0$.

Άρα $f'(x_0) = f'(0) = 5$

οπότε $y = 5\,x + \beta$.

Το σημείο $\mathrm{A}\left(x_0, f(x_0)\right)$ θα επαληθεύσει την εξίσωση της εφαπτομένης, άρα $\mathrm{A}\left(0, f(0)\right) = \mathrm{A}\left(0, \frac{1}{3}\right)$ και αντικαθιστώντας θα έχω $\frac{1}{3} = \beta$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΧΑΝΙΑ

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 5 \cdot x + \frac{1}{3}$.

B4. $\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

Από ορισμό παραγώγου έχουμε $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Για $x_0 = -1$ έχουμε: $\lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) =$

$= (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12.$

ΘΕΜΑ Γ

22, 18, 20 + *κ*, 14, 16 $\qquad Cv = 20\%, \ S = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$

Γ1. $x^2 + 6x - 7$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 8}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -7 \end{array} \right.$

Άρα $x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$

Οπότε $S = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+7)}{2\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+7)}{2} = \frac{1+7}{2} = 4.$

Γ2. $Cv = 20\%$

$\Rightarrow \frac{S}{|\overline{x}|} = \frac{20}{100}$

$\Rightarrow \frac{4}{|\overline{x}|} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow |\overline{x}| = 20$

$\Rightarrow \overline{x} = 20$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΧΑΝΙΑ

Γ3. $\bar{x} = 20$

$$\Rightarrow \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} = 20$$

$$\Rightarrow 90+\kappa = 100$$

$$\Rightarrow \kappa = 10$$

Για τη διάμεσο τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

14, 16, 18, 22, 30

$\delta = x_3 = 18$ (Η μεσαία παρατήρηση σε περιττό πλήθος).

Γ4. Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{y} = \bar{x} + \frac{10}{100}\bar{x}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 1{,}1\bar{x}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 1{,}1 \cdot 20$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 22 \text{ και } Sy = 1{,}1 \cdot Sx$$

$$\Rightarrow Sy = 1{,}1 \cdot 4$$

$$\Rightarrow Sy = 4{,}4$$

Άρα $Cv_y = \dfrac{Sy}{\bar{y}} = \dfrac{4{,}4}{22} = 0{,}2$ ή 20%.

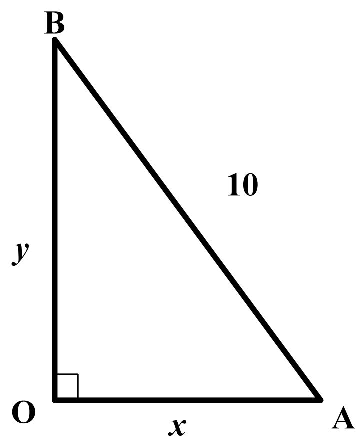
ΘΕΜΑ Δ

$\hat{O} = 90°$

$(OA) = x$

$(OB) = y$

$(AB) = 10$



ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΧΑΝΙΑ

Δ1. Γνωρίζουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ότι:

$$(\mathrm{AB})^2 = (\mathrm{OB})^2 + (\mathrm{OA})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^2 = y^2 + x^2 \Leftrightarrow y^2 = 10^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{10^2 - x^2}$$

$$y = f(\mathrm{x}) = \sqrt{10^2 - x^2}$$

Για τη συνάρτηση f πρέπει να ισχύει:

$$10^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 100$$

$$|x| \leq 100 \Rightarrow -10 \leq x \leq 10$$

Επειδή x είναι πλευρά τριγώνου πρέπει $x > 0$.

Ακόμη, πρέπει $x \neq 10$, διότι αν $x = 10$ τότε $y = 0$ που είναι αδύνατο, διότι y εκφράζει μήκος πλευράς τριγώνου.

Άρα $A_f = (0, 10)$.

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς x, όταν $x = 8$ δίνεται από τον τύπο της πρώτης παραγώγου της $y = f(x)$ για $\mathrm{x}_0 = 8$.

Άρα

$$f'(\mathrm{x}_0) = f'(8)$$

$$f'(\mathrm{x}) = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}} \cdot \left(100 - x^2\right) = -\frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$$

άρα

$$f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{100 - 64}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Δ3.

$$\lim_{x \to 6} \frac{f(\mathrm{x}) - 8}{x - 6} = \lim_{x \to 6} \frac{\left(\sqrt{100 - x^2} - 8\right) \cdot \left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)}{(x - 6) \cdot \left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6) \cdot \left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x \to 6} \frac{-x^2 + 36}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 6} -\frac{\cancel{(x - 6)}\,(x + 6)}{\cancel{(x - 6)}\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΧΑΝΙΑ

Δ4. $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}<0,$ για κάθε $x\in(0,10)$

Ισχύει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,10)$.

Άρα: $x_1<x_3<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)$.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΔΙΑΚΡΙΣΗ ΧΑΝΙΑ