

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε } F(x+h) - F(x) &= (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) = \\ &= (f(x+h) - f(x)) + (g(x+h) - g(x)) \end{aligned}$$

$$\text{και για } h \neq 0: \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Άρα $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 31)

A2. α) Συχνότητα v_i ονομάζεται ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής X στο σύνολο των παρατηρήσεων.

(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 65)

$$\beta) \bar{x} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_v w_v}{w_1 + w_2 + \dots + w_v} = \frac{\sum_{i=1}^v x_i w_i}{\sum_{i=1}^v w_i}$$

(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 87)

A3. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΛΑΘΟΣ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 3x^2 + 5x + \frac{1}{3}, x \in \mathbb{R}$$

B1.
$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^3)' - 3(x^2)' + 5(x)' + \left(\frac{1}{3}\right)' =$$

$$\cancel{\frac{1}{3}}x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 5$$

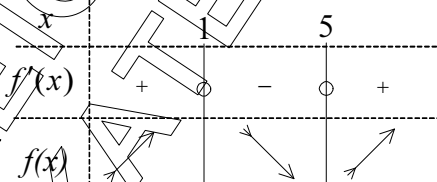
B2.
$$f'(x) = x^2 - 6x + 5$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16.$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

Η $f'(x) = x^2 - 6x + 5$ έχει 2 ρίζες, την $x_1 = 5$ και τη $x_2 = 1$.



Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και $[5, +\infty)$, ενώ γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 5]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = 1$, το $f(1) = \frac{1}{3} - 3 + 5 + \frac{1}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 5$, το $f(5) = \frac{1}{3} \cdot 125 - 3 \cdot 25 + 5 \cdot 5 + \frac{1}{3} = \frac{126}{3} - 50 = -\frac{24}{3} = -8$.

B3. Η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από τον τύπο $y = \lambda \cdot x + \beta$ όπου λ είναι η πρώτη παράγωγος στο $x_0 = 0$.

$$\text{Άρα } f'(x_0) = f'(0) = 5$$

$$\text{οπότε } y = 5x + \beta.$$

Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ θα επαληθεύσει την εξίσωση της εφαπτομένης, άρα

$$A(0, f(0)) = A\left(0, \frac{1}{3}\right) \text{ και αντικαθιστώντας θα έχω } \frac{1}{3} = \beta.$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 5 \cdot x + \frac{1}{3}$.

B4. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

Από ορισμό παραγώγου έχουμε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Για $x_0 = -1$ έχουμε: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) =$
 $= (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12.$

ΘΕΜΑ Γ

22, 18, $20 + \kappa$, 14, 16

$Cv = 20\%$, $S = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$

Γ1. $x^2 + 6x - 7$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7) = 36 + 28 = 64 > 0$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 8}{2} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -7 \end{array} \right.$

Άρα $x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$

Οπότε $S = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+7)}{2} = \frac{1+7}{2} = 4.$

Γ2. $Cv = 20\%$

$\Rightarrow \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{20}{100}$

$\Rightarrow \frac{4}{|\bar{x}|} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow |\bar{x}| = 20$

$\Rightarrow \bar{x} = 20$

Γ3. $\bar{x} = 20$

$$\Rightarrow \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} = 20$$

$$\Rightarrow 90 + \kappa = 100$$

$$\Rightarrow \kappa = 10$$

Για τη διάμεσο τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

14, 16, 18, 22, 30

$\delta = x_3 = 18$ (Η μεσαία παρατήρηση σε περιττό πλήθος).

Γ4. Η νέα μέση τιμή θα είναι:

$$\bar{y} = \bar{x} + \frac{10}{100} \bar{x}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 1,1\bar{x}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 1,1 \cdot 20$$

$$\Rightarrow \bar{y} = 22 \text{ και } S_y = 1,1 \cdot S_x$$

$$\Rightarrow S_y = 1,1 \cdot 4$$

$$\Rightarrow S_y = 4,4$$

$$\text{Άρα } C_{v_y} = \frac{S_y}{\bar{y}} = \frac{4,4}{22} = 0,2 \text{ ή } 20\%$$

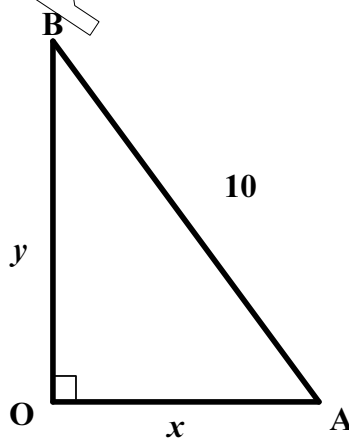
ΘΕΜΑ Δ

$$\hat{O} = 90^\circ$$

$$(OA) = x$$

$$(OB) = y$$

$$(AB) = 10$$



Δ1. Γνωρίζουμε από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ότι:

$$(AB)^2 = (OB)^2 + (OA)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10^2 = y^2 + x^2 \Leftrightarrow y^2 = 10^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{10^2 - x^2}$$

$$y = f(x) = \sqrt{10^2 - x^2}$$

Για τη συνάρτηση f πρέπει να ισχύει:

$$10^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 100$$

$$|x| \leq 100 \Rightarrow -10 \leq x \leq 10$$

Επειδή x είναι πλευρά τριγώνου πρέπει $x > 0$.

Ακόμη, πρέπει $x \neq 10$, διότι αν $x = 10$ τότε $y = 0$ που είναι αδύνατο, διότι y εκφράζει μήκος πλευράς τριγώνου.

Άρα $A_f = (0, 10)$.

Δ2. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = 8$ δίνεται από τον τύπο της πρώτης παραγώγου της $y = f(x)$ για $x_0 = 8$.

Άρα

$$f'(x_0) = f'(8)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100-x^2}} \cdot (100-x^2) = -\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}$$

άρα

$$f'(8) = -\frac{8}{\sqrt{100-64}} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

Δ3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{100-x^2} - 8) \cdot (\sqrt{100-x^2} + 8)}{(x-6) \cdot (\sqrt{100-x^2} + 8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{100 - x^2 - 64}{(x-6) \cdot (\sqrt{100-x^2} + 8)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-x^2 + 36}{(x-6) \cdot (\sqrt{100-x^2} + 8)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\cancel{(x-6)}(x+6)}{\cancel{(x-6)}(\sqrt{100-x^2} + 8)} = -\frac{12}{16} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Δ4. $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{100-x^2}} < 0$, για κάθε $x \in (0, 10)$

Ισχύει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 10)$.

Άρα: $x_1 < x_3 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_3) > f(x_2)$.

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
ΚΑΤΕΡΙΝΗ