ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη (σελ.93 σχολικού βιβλίου).

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού
$\frac{\left(t_1-\bar{x}\right)+\left(t_2-\bar{x}\right)+....\left(t_\nu-\bar{x}\right)}{\nu}=\frac{t_1+t_2+...+t_\nu}{\nu}-\frac{\nu\bar{x}}{\nu}=\bar{x}-\bar{x}=0$.

Α2. Ορισμός (Σχολικό σελ 16)
Γενικά μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Α3.
α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Λάθος

Α4.
α. $(c)'=0$
β. $\left(x^2\right)'=2x$

ΣΥΓΧΡΟΝΟ ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ ΑΓ.

ΘΕΜΑ Β

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	f_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i \cdot v_i$
0	10	0,20	20	10	0
1	15	0,30	30	25	15
2	11	0,22	22	36	22
3	8	0,16	16	44	24
4	6	0,12	12	50	24
Σύνολο	50	1	100		85

Β1. $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Leftrightarrow v_1 = 50 - 40 = 10$

Β2. $\bar{x} = \frac{1}{50} \cdot \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot v_i = \frac{1}{50} \cdot 85 = \frac{170}{100}$ Άρα $\bar{x} = 1,7$

Β3. Αφού το πλήθος είναι άρτιος αριθμός η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμά των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

$\frac{v}{2} = \frac{50}{2} = 25^{\eta}$

$\frac{v}{2} + 1 = 25 + 1 = 26^{\eta}$

Έτσι : $\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \delta = 1,5$

Β4. α) Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες είναι:

$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 20 + 30 + 22 + 16 = 88\%$

β) Έστω y_i οι νέες ώρες

$y_i = x_i + 4, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

οπότε: $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 \Leftrightarrow \bar{y} = 5,7$

ΑΥΓΕΡΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΑΡΑΧΤΙΔΗΣ

ΘΕΜΑ Γ

Έχω $f(x)=-2x^3+6x^2+a, \quad x\in\mathbb{R}$

Γ1. $f'(x)=\left(-2x^3+6x^2+\alpha\right)'=-6x^2+12x$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -6x^2+12x=0\Leftrightarrow -6x\cdot(x-2)=0\Leftrightarrow x=0 \ \eta \ x=2$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘		↗		↘	

Για $x\in(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x\in[0,2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x\in(2,+\infty]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ2. Στο $x_1=0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0)=\alpha$

Στο $x_2=2$ η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(2)=\alpha+8$

Αφού $\frac{f(0)+f(2)}{2}=-8\Leftrightarrow\frac{\alpha+\alpha+8}{2}=-8\Leftrightarrow\frac{2\alpha+8}{2}=-8\Leftrightarrow\alpha+4=-8\Leftrightarrow\alpha=-12$

Γ3. Έστω ε: $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης, τότε ισχύει:

$\lambda=f'(1)=-6\cdot1^2+12\cdot1\Rightarrow\lambda=6$

Έτσι έχω ε: $y=6x+\beta$

Αφού $M(1,f(1))\in C_f$ ισχύει $f(1)=6\cdot1+\beta\Rightarrow-8=6+\beta\Rightarrow\beta=-14$

Επομένως ε: $y=6x-14$.

Γ4. Για $x\in[2,+\infty)$ έχω f γνησίως φθίνουσα, έτσι

για $x\geq2\Rightarrow f(x)\leq f(2)\Rightarrow -2x^3+6x^2-12\leq-4\Rightarrow -2x^3+6x^2-8\leq0\overset{:(-2)}{\Rightarrow}x^3-3x^2+4\geq0$.

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΥΛΙΚΟ ΔΙΑΘΕΣΗΣ

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\lambda x^2+7x+\frac{2}{3}, \quad x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=x^2+2\lambda x+7$

Δ1. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0 \Leftrightarrow f'(1)=0 \Leftrightarrow 1^2+2\lambda\cdot 1+7=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-8 \Leftrightarrow \lambda=-4$

Άρα: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+7x+\frac{2}{3}$

$f'(x)=x^2-8x+7$

$f''(x)=2x-8$

Δ2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-8x+7=0$

$\Delta=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 7=64-28=36$

Άρα $x_{1,2}=\frac{8\pm 6}{2}$. Επομένως $x_1=\frac{8+6}{2}=7$ και $x_2=\frac{8-6}{2}=1$.

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
x^2-8x+7	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		

Για $x\in(-\infty,1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x\in[1,7]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x\in[7,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

ΣΥΧΡΟΝΟ ΔΙΑΣΚΕΥΗ

Δ3.

Έχω 2020, 2025 $\in[7,+\infty)$ με

$2020<2025 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi ουσα}{\Leftrightarrow} f(2020)<f(2025) \Leftrightarrow f(2025)-f(2020)>0$

Έχω $\frac{3}{2},\frac{5}{2}\in[1,7]$ με $\frac{3}{2}<\frac{5}{2} \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}νουσα}{\Leftrightarrow} f(\frac{3}{2})>f(\frac{5}{2}) \Leftrightarrow f(\frac{3}{2})-f(\frac{5}{2})>0$

Οπότε: $\mathrm{A}=\dfrac{f(2025)-f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)}>0$

Δ4. Έχω $f''(x)=2x-7, \quad x\in\mathbb{R}$, οπότε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-f''(x)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-(2x-8)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-2x+8+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-10x+16}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x+1}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{3}^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{x+1-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})=(2-8)\cdot(\sqrt{2+1}+\sqrt{3})=-6\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{3})=-6\cdot 2\sqrt{3}=-12\sqrt{3}\,.$$

ΣΧΟΛΙΚΟ ΓΑΡΑΚΕΥΗ Α.Γ.