

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη (σελ.93 σχολικού βιβλίου).

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_n - \bar{x})}{n} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n} - \frac{n\bar{x}}{n} = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

A2. Ορισμός (Σχολικό σελ 16)

Γενικά μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$

ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

A3.

- α. Λάθος
- β. Σωστό
- γ. Σωστό
- δ. Σωστό
- ε. Λάθος

A4.

α. $(c)' = 0$

β. $(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ Β

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα v_i	f_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i \cdot v_i$
0	10	0,20	20	10	0
1	15	0,30	30	25	15
2	11	0,22	22	36	22
3	8	0,16	16	44	24
4	6	0,12	12	50	24
Σύνολο	50	1	100		85

B1. $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Leftrightarrow v_1 + 15 + 11 + 8 + 6 = 50 \Leftrightarrow v_1 = 50 - 40 = 10$

B2. $\bar{x} = \frac{1}{50} \cdot \sum_{i=1}^5 x_i \cdot v_i = \frac{1}{50} \cdot 85 = \frac{170}{100}$ Άρα $\bar{x} = 1,7$

B3. Αφού το πλήθος είναι άρτιος αριθμός η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμά των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

$$\frac{v}{2} = \frac{50}{2} = 25^{\eta}$$

$$\frac{v}{2} + 1 = 25 + 1 = 26^{\eta}$$

Έτσι: $\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \delta = 1,5$

B4. α) Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες είναι:

$$f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 20 + 30 + 22 + 16 = 88\%$$

β) Έστω y_i οι νέες ώρες

$$y_i = x_i + 4, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

οπότε: $\bar{y} = \bar{x} + 4 = 1,7 + 4 \Leftrightarrow \bar{y} = 5,7$

ΘΕΜΑ Γ

Έχω $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + a$, $x \in \mathbb{R}$

Γ1. $f'(x) = (-2x^3 + 6x^2 + a)' = -6x^2 + 12x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x \cdot (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	○	+	○	-
f		↗	↘	↘	

Για $x \in (-\infty, 0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x \in [0, 2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x \in (2, +\infty]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ2. Στο $x_1 = 0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = a$

Στο $x_2 = 2$ η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(2) = a + 8$

$$\text{Αφού } \frac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{a + a + 8}{2} = -8 \Leftrightarrow \frac{2a + 8}{2} = -8 \Leftrightarrow a + 4 = -8 \Leftrightarrow a = -12$$

Γ3. Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης, τότε ισχύει:

$$\lambda = f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 \Rightarrow \lambda = 6$$

Έτσι έχω $y = 6x + \beta$

Αφού $M(1, f(1)) \in C_f$ ισχύει $f(1) = 6 \cdot 1 + \beta \Rightarrow -8 = 6 + \beta \Rightarrow \beta = -14$

Επομένως $y = 6x - 14$.

Γ4. Για $x \in [2, +\infty)$ έχω f γνησίως φθίνουσα, έτσι

$$\text{για } x \geq 2 \Rightarrow f(x) \leq f(2) \Rightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Rightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0.$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \lambda x^2 + 7x + \frac{2}{3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$$

$$\Delta 1. \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1^2 + 2\lambda \cdot 1 + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

$$\text{Άρα: } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = x^2 - 8x + 7$$

$$f''(x) = 2x - 8$$

$$\Delta 2. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = 64 - 28 = 36$$

$$\text{Άρα } x_{1,2} = \frac{8 \pm 6}{2}. \text{ Επομένως } x_1 = \frac{8+6}{2} = 7 \text{ και } x_2 = \frac{8-6}{2} = 1.$$

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$	
$x^2 - 8x + 7$	+	○	-	○	+
$f'(x)$	+	○	-	○	+
f					

Για $x \in (-\infty, 1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x \in [1, 7]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x \in [7, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3.

Έχω $2020, 2025 \in [7, +\infty)$ με

$$2020 < 2025 \stackrel{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} f(2020) < f(2025) \Leftrightarrow f(2025) - f(2020) > 0$$

$$\text{Έχω } \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \in [1, 7] \text{ με } \frac{3}{2} < \frac{5}{2} \stackrel{f \text{ γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$$

$$\text{Οπότε: } A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0$$

Δ4. Έχω $f''(x) = 2x - 7$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - (2x - 8) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1 - \sqrt{3}^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x+1-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-8) \cdot (\sqrt{x+1} + \sqrt{3}) = (2-8) \cdot (\sqrt{2+1} + \sqrt{3}) = -6 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = -6 \cdot 2\sqrt{3} = -12\sqrt{3}. \end{aligned}$$