

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 186
A2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 76
A3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 161
A4. α) Σ, β) Σ, γ) Λ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

- B1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

$$f'(x) = (x^3 + ax^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2ax + 9$$

Αφού f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$, από θεώρημα Fermat πρέπει:

$$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = -6$$

Για $a = -6$ έχω $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

- B2. Για:

$$a = -6: f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$x < 1 \quad \text{ή} \quad x > 3$$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	$\circ$	-	$\circ$	+
f					

Έστω :

$$A_1 = (-\infty, 1)$$

$$A_2 = [1, 3]$$

$$A_3 = (3, +\infty)$$

$$f((0, 1)) \xrightarrow{f \text{ αύξουσα}} \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \right) = (-3, 1)$$

Αφού $0 \in f((0, 1))$ και f αύξουσα στο $(0, 1)$ υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_1 \in (0, 1)$ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$f(A_2) = f([1, 3]) \xrightarrow{f \text{ φθίνουσα}} [f(3), f(1)] = [-3, 1]$$

Αφού $0 \in f([1, 3])$ και f φθίνουσα στο $[1, 3]$ υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_2 \in [1, 3]$ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$$f(A_3) = f((3, +\infty)) \xrightarrow{f \text{ αύξουσα}} \left(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-3, +\infty)$$

Αφού $0 \in f(A_3)$ και f φθίνουσα στο A_3 υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_3 \in (3, +\infty)$ της $f(x) = 0$.

Αφού $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in [1, 3]$ και $x_3 \in (3, +\infty)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 θετικές ρίζες.

B3. $f''(x) = (3x^2 - 12x + 9)' = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	$\circ$	+
f			

f κοίλη στο $(-\infty, 2]$

f κυρτή στο $[2, +\infty)$

σ.κ. της C_f είναι το $\Sigma((2, f(2))) = \boxed{\Sigma(2, -1)}$

B4. Ισχύει $g(x) = x + f(x)$ (1), $x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) = 1 + f'(x)$ (2), $x \in \mathbb{R}$.

Αν ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ τότε

$$\varepsilon_1: y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \quad \text{ή} \quad \varepsilon_1: y = f'(\xi) \cdot x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

Αν ε_2 η εφαπτομένη της C_g στο $B(\xi, g(\xi))$ τότε

$$\varepsilon_2: y - g(\xi) = g'(\xi)(x - \xi) \quad \text{ή} \quad \varepsilon_2: y = g'(\xi) \cdot x + g(\xi) - \xi g'(\xi)$$

Τα σημεία τομής των ε_1 και ε_2 προκύπτουν από την εξίσωση:

$$f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = g'(\xi)x + g(\xi) - \xi g'(\xi) \Rightarrow$$

$$f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = (1 + f'(\xi))x + \xi + f(\xi) - \xi \cdot (1 + f'(\xi))$$

$$\cancel{f'(\xi)x} + \cancel{f(\xi)} - \xi \cancel{f'(\xi)} = x + \cancel{f'(\xi)x} + \xi + \cancel{f(\xi)} - \xi - \xi \cancel{f'(\xi)}$$

$$x = 0$$

Άρα $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στον $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \eta\mu x) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + x} = 0$$

$$f(0) = 0$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x}) = e^0 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 \cdot (1 + \frac{1}{x})}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \stackrel{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ |x|=x}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Γ2. Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

Η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x \cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[e^x \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = 0 \cdot 0 = 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$$

γιατί: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x} \right| \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x} \right|$$

Από κρ. Παρεμβολής: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \mathcal{A}^{=0} \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

γιατί: $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -e^x \leq e^x \cdot \eta\mu x \leq e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x) = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$$

Από κρ. Παρεμβολής: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x \cdot \eta\mu x) = 0$

Η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} \quad \left(\begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \\ |x| = x \end{array} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \sqrt{1 + 0} = 1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \mathcal{A}^{=1} \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{|x| \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} \stackrel{\substack{x \rightarrow +\infty \\ |x| = x}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} = \beta \in \mathbb{R}.$$

Η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Γ3. Έστω $g(x) = f(x) - (x + \frac{1}{2}) = e^x \cdot \eta\mu x - x - \frac{1}{2}$

- Η g συνεχής στο $[-\pi, 0]$ ως πράξεις συνεχών.

$$g(-\pi) = e^{-\pi} \cdot \eta\mu(-\pi) - (-\pi) - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$g(0) = e^0 \cdot \eta\mu(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

- $g(-\pi) \cdot g(0) < 0$

Από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi, 0)$.

Γ4. $y(t) = \sqrt{x^2(t) + x(t)}$, $x(t) \geq 0$ και $x'(t) > 0$

$$y'(t) = \frac{2 \cdot x(t) \cdot x'(t) + x'(t)}{2 \cdot \sqrt{x^2(t) + x(t)}}$$

$$\text{Για } t = t_0 : y'(t_0) = \frac{2 \cdot x(t_0) \cdot x'(t_0) + x'(t_0)}{2 \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \quad y'(t_0) = x'(t_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x'(t_0) = \frac{x'(t_0) \cdot [2 \cdot x(t_0) + 1]}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \quad \frac{x'(t_0)}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} > 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{2 \cdot x(t_0) + 1}{2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{x^2(t_0) + x(t_0)} = 2 \cdot x(t_0) + 1$$

$$\text{Αρα } 4 \cdot [x^2(t_0) + x(t_0)] = [2 \cdot x(t_0) + 1]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot x^2(t_0) + 4 \cdot x(t_0) = 4 \cdot x^2(t_0) + 4 \cdot x(t_0) + 1 \Leftrightarrow 0 = 1 \quad \text{Αδύνατη}$$

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης x του M .

Σχόλιο: Κανονικά, η περίπτωση $t = 0$ (όπου $x(0) = 0$) θα έπρεπε να εξεταστεί ξεχωριστά και να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση y δεν είναι παραγωγίσιμη γι' αυτήν την τιμή. Όμως, αφού δίνεται $x'(t) > 0$, οι θεματοδότες προφανώς θεωρούν ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, άρα υπονοείται η χρήση της παραγώγου στα σημεία που αυτή ορίζεται (δηλαδή για $t > 0$ όπου $x(t) > 0$).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $x \cdot f(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x \Leftrightarrow$

- $x \cdot F'(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} F'(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \frac{\ln x}{x} \quad (1)$
- $(x^{\ln x})' = (e^{\ln x \cdot \ln x})' = (e^{\ln^2 x})' = e^{\ln^2 x} \cdot (\ln^2 x)' = x^{\ln x} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}$
- $1 \cdot f(1) = 2 \cdot F(1) \cdot \ln 1 \stackrel{0}{\Leftrightarrow} f(1) = 0$ και $f'(1) = 2$

Η $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$ συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Η $g(x)$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$g'(x) = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot (x^{\ln x})'}{(x^{\ln x})^2} = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot x^{\ln x} \cdot \frac{2 \ln x}{x}}{(x^{\ln x})^2} =$$

$$= \frac{x^{\ln x} \cdot \left(F'(x) - F(x) \cdot \frac{2 \ln x}{x} \right)}{(x^{\ln x})^2} \stackrel{(1)}{=} 0$$

Άρα η $g(x)$ είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

Δ2.

I. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \cdot (x-1)}{\ln x \cdot (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{\ln x} \right] = 2$

γιατί: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = 2$

και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(\ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$ $\stackrel{DLH}{=}$

II. Για $x=1$: $g(1) = c \Leftrightarrow \frac{F(1)}{1^{\ln 1}} = c \Leftrightarrow c = F(1)$

Η F συνεχής στο $x=1$ άρα

$$F(1) = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f(x)}{2 \cdot \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{2} \cdot \frac{f(x)}{\ln x} \right] = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Άρα $c=1$ οπότε $\frac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}$.

Δ3. $F'(x) = x^{\ln x} \cdot 2 \cdot \frac{\ln x}{x}$

$$F'(x) = 0 \stackrel{x^{\ln x} \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$F'(x) > 0 \stackrel{x^{\ln x} > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \stackrel{\ln x \text{ γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} x > 1$$

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$		0	+
$F(x)$			↗

H F γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

H F γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$

H F έχει ελάχιστο το $F(1) = 1$.

• Αν $0 < x^2 < x \leq 1$ $\stackrel{F \text{ γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x)$

Άρα $F(x) - F(x^2) < 0$

• Αν $1 \leq x < x^2$ $\stackrel{F \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} F(x) < F(x^2)$

Άρα $F(x) - F(x^2) < 0$

Η εξίσωση γίνεται :

$$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x) - F(x^2) = (x-1)^2$$

Ισχύει $F(x) - F(x^2) < 0$ για κάθε $x \neq 1$

$$(x-1)^2 > 0 \quad \text{για κάθε } x \neq 1$$

Άρα η εξίσωση είναι **Αδύνατη** για κάθε $x \neq 1$.

Το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης οπότε είναι μοναδική στο $(0, +\infty)$.

Δ4. $E = \int_1^e |F(x)| dx$ με $F(x) > 0, \forall x \in [1, e]$

$$\text{Άρα } E = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e x^{\ln x} dx = \int_1^e (e^{\ln x \ln x}) dx = \int_1^e e^{\ln^2 x} dx$$

Από την ανισότητα $e^x \geq x+1$ αν βάλουμε όπου το x το $\ln^2 x$ προκύπτει $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ με το « $\Rightarrow$ » να ισχύει μόνο για $x = 1$.

$$\text{Άρα } \int_1^e e^{\ln^2 x} dx > \int_1^e (\ln^2 x + 1) dx$$

$$\int_1^e (\ln^2 x + 1) dx = \underbrace{\int_1^e \ln^2 x dx}_A + \underbrace{\int_1^e 1 dx}_B$$

$$\bullet \quad B = \int_1^e 1 dx = [x]_1^e = e - 1$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad A &= \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x dx = [x \cdot \ln^2 x]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln^2 x)' dx = \\ &= e \cdot \ln^2 e - 1 \cdot \ln^2 1 - \int_1^e x \cdot \frac{2 \cdot \ln x}{x} dx = \\ &= e - 2 \cdot \int_1^e (x)' \cdot \ln x dx = e - 2 \cdot \left\{ [x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)' dx \right\} \\ &= e - 2 \cdot \left\{ e \cdot \ln^1 e - 1 \cdot \ln^0 1 - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx \right\} = \\ &= e - 2 \cdot e + 2 \cdot [x]_1^e = -e + 2 \cdot (e - 1) = -e + 2 \cdot e - 2 = e - 2 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \int_1^e e^{\ln^2 x} dx = e - 2 + e - 1 = 2 \cdot e - 3$$

$$\text{Άρα } E > 2 \cdot e - 3.$$