ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 186

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 76

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 161

Α4. **α)** Σ, **β)** Σ, **γ)** Λ, **δ)** Λ, **ε)** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

$f'(x) = (x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3)' = 3x^2 + 2ax + 9$

Αφού f παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του $D_f = \mathbb{R}$, από θεώρημα Fermat πρέπει:

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + 9 = 0 \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = -6$

Για $\alpha = -6$ έχω $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

Β2. Για:

$a = 6 : f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \times 1} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$

$x_1 = 3$

$x_2 = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow$

$x < 1 \quad ή \quad x > 3$

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+		−		+
f	↗		↘		↗

Έστω :

$A_1 = (-\infty, 1)$

$A_2 = [1, 3]$

$A_3 = (3, +\infty)$

$f\big((0,1)\big) \xrightarrow{f \text{ αύξουσα}} \left(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\right) = (-3, 1)$

Αφού $0 \in f\big((0,1)\big)$ και f αύξουσα στο (0, 1) υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_1 \in (0,1)$ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$f(A_2) = f([1,3]) \xrightarrow{f \text{ φθίνουσα}} [f(3), f(1)] = [-3, 1]$

Αφού $0 \in f([1,3])$ και f φθίνουσα στο [1,3] υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_2 \in [1,3]$ της εξίσωσης $f(x) = 0$.

$f(A_3) = f((3,+\infty)) \xrightarrow{f \text{ αύξουσα}} \left(\lim_{x\to 3^+} f_{(x)}, \lim_{x\to+\infty} f_{(x)}\right) = (-3, +\infty)$

Αφού $0 \in f(A_3)$ και f φθίνουσα στο A3 υπάρχει 1 μόνο ρίζα $x_3 \in (3, +\infty)$ της $f(x) = 0$.

Αφού $x_1 \in (0,1)$, $x_2 \in [1,3]$ και $x_3 \in (3, +\infty)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 θετικές ρίζες.

B3. $f''(x) = \left(3x^2 - 12x + 9\right)' = 6x - 12$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	−		+
f			

f κοίλη στο $(-\infty, 2]$

f κυρτή στο $[2, +\infty)$

σ.κ. της C_f είναι το $\Sigma\big((2, f(2))\big) = \boxed{\Sigma(2,-1)}$

Β4. Ισχύει $g(x) = x + f(x)$ (1), $x \in \mathbb{R}$ και $g'(x) = 1 + f'(x)$ (2), $x \in \mathbb{R}$.

Αν ε_1 η εφαπτομένη της C_f στο $A\big(\xi, f(\xi)\big)$ τότε

ε_1: $y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi)$ ή ε_1: $y = f'(\xi)\cdot x + f(\xi) - \xi f'(\xi)$

Αν ε_2 η εφαπτομένη της C_g στο $B\big(\xi, g(\xi)\big)$ τότε

ε_2: $y - g(\xi) = g'(\xi)(x-\xi)$ ή ε_2: $y = g'(\xi)\cdot x + g(\xi) - \xi g'(\xi)$

Τα σημεία τομής των ε_1 και ε_2 προκύπτουν από την εξίσωση:

$f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = g'(\xi)x + g(\xi) - \xi g'(\xi) \Rightarrow$

$f'(\xi)x + f(\xi) - \xi f'(\xi) = \big(1 + f'(\xi)\big)x + \xi + f(\xi) - \xi\cdot\big(1 + f'(\xi)\big)$

$\cancel{f'(\xi)}x + \cancel{f(\xi)} - \xi\,\cancel{f'(\xi)} = x + \cancel{f'(\xi)}x + \cancel{\xi} + \cancel{f(\xi)} - \cancel{\xi} - \xi\,\cancel{f'(\xi)}$

$x = 0$

Άρα ε_1, ε_2 τέμνονται στον $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(e^x\cdot \eta\mu x) = e^0\cdot\eta\mu 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+x} = 0$

$f(0) = 0$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\Big(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\Big) = e^0\cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2\cdot\big(1+\frac{1}{x}\big)}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} \overset{\substack{x\to 0^+\\ |x|=x}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = +\infty$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

Γ2. Η f συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως γινόμενο συνεχών.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών.

Η f συνεχής στο $x_0 = 0$.

Άρα η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x\cdot \eta\mu x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right] = 0\cdot 0 = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$$

γιατί: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{x}\right| \le \frac{\eta\mu x}{x} \le \left|\frac{1}{x}\right|$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\left|\frac{1}{x}\right|\right) = 0 = \lim_{x\to-\infty}\left|\frac{1}{x}\right|$$

Από κρ. Παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) - \cancel{\lambda}^{=0}\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\eta\mu x\right) = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

γιατί: $-1 \le \eta\mu x \le 1 \overset{\cdot e^x > 0}{\Leftrightarrow} -e^x \le e^x\cdot\eta\mu x \le e^x$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-e^x\right) = 0 = \lim_{x\to-\infty} e^x$$

Από κρ. Παρεμβολής: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\eta\mu x\right) = 0$

Η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} \overset{\binom{x\to+\infty}{|x|=x}}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = \sqrt{1+0} = 1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \cancel{\lambda}^{=1}\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} \overset{\substack{x\to+\infty\\|x|=x}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} =$$

$$= \frac{1}{2} = \beta \in \mathbb{R}.$$

Η ευθεία $y = x + \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Γ3. Έστω $g(x)=f(x)-(x+\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{x}\cdot\eta\mu x-x-\frac{1}{2}$

- Η g συνεχής στο $\left[-\pi,\,0\right]$ ως πράξεις συνεχών.

$g(-\pi)=e^{-\pi}\cdot\eta\mu(-\pi)-(-\pi)-\frac{1}{2}=\pi-\frac{1}{2}>0$

$g(0)=e^{0}\cdot\eta\mu(0)-0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$

- $g(-\pi)\cdot g(0)<0$

Από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=x+\frac{1}{2}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\left(-\pi,\,0\right)$.

Γ4. $y(t)=\sqrt{x^2(t)+x(t)}$, $x(t)\geq 0$ και $x'(t)>0$

$y'(t)=\dfrac{2\cdot x(t)\cdot x'(t)+x'(t)}{2\cdot\sqrt{x^2(t)+x(t)}}$

Για $t=t_0$: $y'(t_0)=\dfrac{2\cdot x(t_0)\cdot x'(t_0)+x'(t_0)}{2\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}}\overset{y'(t_0)=x'(t_0)}{\Longleftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x'(\mathrm{t}_0)=\dfrac{x'(t_0)\cdot\left[2\cdot x(t_0)+1\right]}{2\cdot\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}}\overset{:x'(t_0)>0}{\Longleftrightarrow}1=\dfrac{2\cdot x(t_0)+1}{2\cdot\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cdot\sqrt{x^2(t_0)+x(t_0)}=2\cdot x(t_0)+1$

Άρα $4\cdot\left[x^2(t_0)+x(t_0)\right]=\left[2\cdot x(t_0)+1\right]^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\cdot x^2(t_0)+4\cdot x(t_0)=4\cdot x^2(t_0)+4\cdot x(t_0)+1\Leftrightarrow 0=1$ <u>Αδύνατη</u>

Άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή t_0 τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M.

Σχόλιο: Κανονικά, η περίπτωση $t=0$ (όπου $x(0)=0$) θα έπρεπε να εξεταστεί ξεχωριστά και να διαπιστωθεί ότι η συνάρτηση y δεν είναι παραγωγίσιμη γι' αυτήν την τιμή. Όμως, αφού δίνεται $x'\left(t\right)>0$, οι θεματοδότες προφανώς θεωρούν ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη, άρα υπονοείται η χρήση της παραγώγου στα σημεία που αυτή ορίζεται (δηλαδή για $t>0$ όπου $x\left(t\right)>0$).

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισχύει $x \cdot f(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x \Leftrightarrow$

- $x \cdot F'(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \ln x \overset{:x>0}{\Leftrightarrow} F'(x) = 2 \cdot F(x) \cdot \dfrac{\ln x}{x}$ (1)
- $\left(x^{\ln x}\right)' = \left(e^{\ln x^{\ln x}}\right)' = \left(e^{\ln^2 x}\right)' = e^{\ln^2 x} \cdot \left(\ln^2 x\right)' = x^{\ln x} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \dfrac{1}{x}$
- $1 \cdot f(1) = 2 \cdot F(1) \cdot \overset{0}{\cancel{\ln 1}} \Leftrightarrow f(1) = 0$ και $f'(1) = 2$

Η $g(x) = \dfrac{F(x)}{x^{\ln x}}$ συνεχής ως πράξεις συνεχών.

Η $g(x)$ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων

$$g'(x) = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot \left(x^{\ln x}\right)'}{\left(x^{\ln x}\right)^2} = \frac{F'(x) \cdot x^{\ln x} - F(x) \cdot x^{\ln x} \cdot \dfrac{2\ln x}{x}}{\left(x^{\ln x}\right)^2} =$$

$$= \frac{x^{\ln x} \cdot \left(F'(x) - F(x) \cdot \dfrac{2\ln x}{x}\right)}{\left(x^{\ln x}\right)^2} \overset{(1)}{=} 0$$

Άρα η $g(x)$ είναι σταθερή, δηλαδή $g(x) = \mathrm{c},\ \mathrm{c} \in \mathbb{R}$

Δ2.

I. $\lim_{x\to1} \dfrac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to1} \dfrac{f(x)\cdot(x-1)}{\ln x \cdot (x-1)} = \lim_{x\to1}[\dfrac{f(x)}{x-1} \cdot \dfrac{x-1}{\ln x}] = 2$

γιατί: $\lim_{x\to1} \dfrac{f(x)}{x-1} = \lim_{x\to1} \dfrac{f(x) - \mathrm{f}(1)}{x-1} = f'(1) = 2$

και $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x-1}{\ln x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{(x-1)'}{(\ln x)'} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = 1$

II. Για x=1: $g(1) = c \Leftrightarrow \dfrac{F(1)}{1^{\ln 1}} = c \Leftrightarrow c = F(1)$

Η F συνεχής στο x=1 άρα

$F(1) = \lim_{x\to1} F(x) = \lim_{x\to1} \dfrac{x \cdot f(x)}{2 \cdot \ln x} = \lim_{x\to1}[\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{f(x)}{\ln x}] = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Άρα c=1 οπότε $\dfrac{F(x)}{x^{\ln x}} = 1 \Leftrightarrow F(x) = x^{\ln x}$.

Δ3. $F'(x) = x^{\ln x} \cdot 2 \cdot \dfrac{\ln x}{x}$

$F'(x) = 0 \overset{x^{\ln x} \neq 0}{\Longleftrightarrow} \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$

$F'(x) > 0 \underset{x>0}{\overset{x^{\ln x}>0}{\Longleftrightarrow}} \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \overset{\ln x \text{ γν.αύξουσα}}{\Longleftrightarrow} x > 1$

x	0 1 +∞
$F'(x)$	− 0 +
$F(x)$	↘ ↗

Η F γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$

Η F γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Η F έχει ελάχιστο το $F(1) = 1$.

- Αν $0 < x^2 < x \leq 1 \overset{F \text{ γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} F(x^2) > F(x)$
  Άρα $F(x) - F(x^2) < 0$
- Αν $1 \leq x < x^2 \overset{F \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} F(x) < F(x^2)$
  Άρα $F(x) - F(x^2) < 0$

Η εξίσωση γίνεται :

$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2 \Leftrightarrow F(x) - F(x^2) = (x-1)^2$

Ισχύει $F(x) - F(x^2) < 0$ για κάθε $x \neq 1$

$(x-1)^2 > 0$ για κάθε $x \neq 1$

Άρα η εξίσωση είναι **Αδύνατη** για κάθε $x \neq 1$.

Το $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης οπότε είναι μοναδική στο $(0, +\infty)$.

Δ4. $E = \int_1^e |F(x)| \mathrm{dx}$ με $F(x) > 0, \forall x \in [1, e]$

Άρα $E = \int_1^e F(x)\mathrm{dx} = \int_1^e x^{\ln x}\mathrm{dx} = \int_1^e \left(e^{\ln x^{\ln x}}\right)\mathrm{dx} = \int_1^e e^{\ln^2 x}\mathrm{dx}$

Από την ανισότητα $e^x \geq x+1$ αν βάλουμε όπου το x το $\ln^2 x$ προκύπτει $e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$ με το «=» να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα $\int_1^e e^{\ln^2 x}\mathrm{dx} > \int_1^e \left(\ln^2 x + 1\right)\mathrm{dx}$

$$\int_1^e \left(\ln^2 x + 1\right)\mathrm{dx} = \underbrace{\int_1^e \ln^2 x\mathrm{dx}}_{\mathrm{A}} + \underbrace{\int_1^e 1\mathrm{dx}}_{\mathrm{B}}$$

- $B = \int_1^e 1\mathrm{dx} = [x]_1^e = e - 1$
- $A = \int_1^e (x)' \cdot \ln^2 x\mathrm{dx} = \left[x \cdot \ln^2 x\right]_1^e - \int_1^e x \cdot \left(\ln^2 x\right)' \mathrm{dx} =$

$$= e \cdot \cancel{\ln^2 e}^{1} - 1 \cdot \cancel{\ln^2 1}^{0} - \int_1^e \cancel{x} \cdot \frac{2 \cdot \ln x}{\cancel{x}}\mathrm{dx} =$$

$$= e - 2 \cdot \int_1^e (x)' \cdot \ln x\mathrm{dx} = e - 2 \cdot \left\{[x \cdot \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)' \mathrm{dx}\right\}$$

$$= e - 2 \cdot \left\{e \cdot \cancel{\ln}^{1} e - 1 \cdot \cancel{\ln}^{0} 1 - \int_1^e \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\mathrm{dx}\right\} =$$

$$= e - 2 \cdot e + 2 \cdot [x]_1^e = -e + 2 \cdot (e - 1) = -e + 2 \cdot e - 2 = e - 2$$

Άρα $\int_1^e e^{\ln^2 x}\mathrm{dx} = e - 2 + e - 1 = 2 \cdot e - 3$

Άρα $E > 2 \cdot e - 3$.