ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση *f*, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η *f* είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση *f*, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.

(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.

(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος,*** *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

β) Αν *f*, *g* είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού *A* και *B*, αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση *f* παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο

$A\left(x_0, f(x_0)\right)$ της C_f, του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπο $g(x)=e^x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$

Μονάδες 5

Β2. Αν $(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x>0$, αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι '1-1' και βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x>1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3,** να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+}\varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda, & x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}, \qquad \text{με } \lambda>0$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\boldsymbol{\lambda}=1$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της ***f*** στο σημείο $A(0,\,1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\dfrac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $M(\boldsymbol{\alpha}, f(\boldsymbol{\alpha}))$, με $\boldsymbol{\alpha} \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ δίνεται από τον τύπο

$$\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$$

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $\boldsymbol{f}$ στο $\boldsymbol{M}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x+x^2-ex-1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$, στο οποίο η $\boldsymbol{f}$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_0)=x_0^{\ 2}-(e+2)x_0+e-1$$

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{1}{f(x)-f(x_0)}+\text{ημ}\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right],$$

όπου $\boldsymbol{x_0}$ το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\boldsymbol{x_0}$ είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x=x_0$ για $x\in(x_0,1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

Μονάδες 5

Δ4. Αν $\boldsymbol{x_0}$ είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_0)>f(\rho)(f'(k)+1)$ για κάθε $k\in(\rho,1)$.

Μονάδες 7