

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 28

A2. Θεωρία, σχολικό βιβλίο σελ. 87

A3. α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΛΑΘΟΣ

A4. α) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$

β) $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Μέση τιμή:

$$\bar{x} = \frac{5 + 10 + 15 + 20 + 25}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

$$\text{Εύρος: } R = t_{\max} - t_{\min} = 25 - 5 = 20.$$

B2. Διακύμανση:

$$s^2 = \frac{(5 - 15)^2 + (10 - 15)^2 + (15 - 15)^2 + (20 - 15)^2 + (25 - 15)^2}{5} = \frac{100 + 25 + 0 + 25 + 100}{5} = \frac{250}{5} = 50$$

B3. Συντελεστής μεταβολής:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{50}}{15} = \frac{\sqrt{2 \cdot 25}}{15} = \frac{5\sqrt{2}}{15} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx \frac{1.41}{3} = 0,47$$

Με συντελεστή μεταβολής περίπου 0,47, ο οποίος είναι μεγαλύτερος από 0,1 το δείγμα

δεν είναι ομοιογενές.

Ακριβέστερα : Είναι $\frac{\sqrt{2}}{3} > 0,1$ διότι ισοδύναμα : $\sqrt{2} > 0,3$ και ισοδύναμα $2 > 0,09$ που είναι αληθές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f'(x) = 3x^2 - 18x + \alpha$.
Δίνεται ότι $f'(1) = 0$, άρα:
 $3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -15 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 15$

Γ2. Για $\alpha = 15$ η συνάρτηση γράφεται: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1$, ενώ η παράγωγος γίνεται : $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(2, f(2))$ έχει τη μορφή $y = \kappa x + \lambda$, όπου:
 $\kappa = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 18 \cdot 2 + 15 = -9$.
Είναι επίσης $f(2) = 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 1 = 3$
Έτσι το σημείο $M(2, f(2))$ γίνεται $M(2, 3)$
Με $\kappa = -9$ εξίσωση της εφαπτομένης γράφεται: $y = -9x + \lambda$
Για $x = 2, y = 3$ είναι $3 = -9 \cdot 2 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 21$.
Άρα τελικά η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(2, 3)$ είναι $y = -9x + 21$

Γ3. Για $\alpha = 15$ έχουμε:
 $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 1, \quad f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$.
 $f'(x) = 3(x^2 - 6x + 5) = 3(x^2 - x - 5x + 5) = 3[x(x - 1) - 5(x - 1)]$
 $= 3(x - 1)(x - 5)$.

Προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	○	+
f		↗	↘	↗	
		T.M.	T.E.		

Δηλαδή: η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1], [5, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 5]$.

Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 1$, το $f(1) = 8$.

Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 5$, το $f(5) = -24$.

$$\Gamma 4. \quad \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \frac{3(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-5)}{x+1}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-5)}{x+1} = \frac{3(1-5)}{1+1} = -6$$

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

Δ1. Για να ορίζεται η συνάρτηση f , πρέπει $x + 1 \neq 0$, άρα $x \neq -1$. Έτσι το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Η παράγωγος ισούται με:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x+1} \right)' = \frac{x' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1 - x^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

Δ2. Επειδή $f'(2) = \frac{1}{(2+1)^2} = \frac{1}{9}$ και $f'(1) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$, προκύπτει ότι $\bar{x} = 9, s = 2$.

Δ3. Χρόνο επιστροφής από 5 έως 10 λεπτά, άρα στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + s)$ έχουν $(13,5 + 34 + 34) \% = 81,5\%$ μαθητές.

Προκύπτει σύνολο $\frac{81,5}{100} \cdot 2000 = 1630$ μαθητές.

Χρόνο επιστροφής πάνω από 15 λεπτά δηλαδή μεγαλύτερο του $\bar{x} + 3s$ έχει το $0,15 \%$, άρα $\frac{0,15}{100} \cdot 2000 = 3$ μαθητές.

Δ4. Αν ο χρόνος επιστροφής αυξηθεί κατά 3 λεπτά:

Η μέση τιμή θα γίνει $\bar{x} + 3 = 9 + 3 = 12$.

Η τυπική απόκλιση θα μείνει η ίδια, δηλαδή 2.