ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(a) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό ζ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_\theta) = \zeta$.

Μονάδες 6

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g, δηλαδή η συνάρτηση $g \circ f$, ορίζεται αν $f(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B} \neq \varnothing$.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma\varphi\, x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu\, x = 0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

και $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Β1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f=\dfrac{g}{h}$ και $r=g\cdot h$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1},\quad x>1\quad \text{και}\quad r(x)=x-\frac{1}{x},\quad x\geq 1.$$

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1}=f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r.

Μονάδες 6

Β4. Να λύσετε την εξίσωση $\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)^2=1+4r(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-2x+4+e^{\lambda}, & 0\leq x<2\\ -x^2+4x-3+\lambda, & x\geq 2\end{cases}$$

με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=0$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

Γ3. **i)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα [0, 3].

(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma\,(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $\mathrm{E}(3, f(3))$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Κινητό σημείο Μ ξεκινά από το σημείο Α(2, 0) και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 0{,}5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega} = \mathrm{A}\hat{\mathrm{O}}\mathrm{M}$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο Μ θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(\mathrm{x}) = \frac{\ln x + ax}{x},$$

όπου $a \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f\left((0,+\infty)\right) = \left(-\infty, 1+\frac{1}{e}\right]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $a = 1$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Μονάδες 6

Δ3. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$ και $x^2 = 4$.

(μονάδες 3)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \le x^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x=-\ln 2$ και $x=0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Μονάδες 7