

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 76.  
**A2.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 155.  
**A3.** Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 216.  
**A4.** α) Σ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

**ΘΕΜΑ Β**

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \geq 1$$

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \geq 1$$

**B1.**  $f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} =$

$$= \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1 \quad (x \in D_g \cap D_h - \{x \mid h(x) = 0\})$$

$$r(x) = g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) =$$
$$= x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}, \quad x \geq 1 \quad (x \in D_g \cap D_h)$$

**B2.** Έστω  $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$  με

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1+1)(x_2-1) = (x_1-1)(x_2+1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Άρα η  $f$  είναι 1-1 και άρα είναι αντιστρέψιμη.

Εύρεση του τύπου της αντίστροφης:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x+1 \Leftrightarrow yx - x = y+1 \Leftrightarrow (y-1)x = y+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

Πρέπει  $y \neq 1$  και

$$\frac{y+1}{y-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{y+1}{y-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{y+1-y+1}{y-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{y-1} > 0 \Leftrightarrow y > 1$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1,$$

οπότε  $f(x) = f^{-1}(x)$  για κάθε  $x > 1$

$$\text{Άρα } f = f^{-1}$$

**B3.**  $r(x) = x - \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$

Κατακόρυφη Ασύμπτωτη:

Η  $r(x)$  είναι συνεχής στο  $[1, +\infty)$  οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

### Πλάγια Ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Άρα η ευθεία  $\delta: y=x$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $r(x)$  καθώς στο  $+\infty$ .

**B4.** Πρέπει:

- $x \in D_{f^{-1}}: x > 1$
- $f(x) \in D_{f^{-1}} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} > 1 \Leftrightarrow x+1 > x-1 \Leftrightarrow 1 > -1$  που ισχύει
- $x \in D_r \Leftrightarrow x \geq 1$ . Επομένως  $x > 1$ .

$$\begin{aligned} (f^{-1}(f(x)))^2 &= 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \\ &\Leftrightarrow x^3 = x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) \\ &= 0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2 - 1) = 0. \text{ Προκύπτει:} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = 1, \text{ απορρίπτεται} \\ x = -1, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$$

### **ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 2$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 4 + e^\lambda) = \cancel{4} \cancel{+ 4} + e^\lambda = e^\lambda$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = 4 - 3 + \lambda = 1 + \lambda$
- $f(2) = 1 + \lambda$



$$\text{Άρα } e^\lambda = \lambda + 1$$

Έχει προφανή ρίζα  $\lambda = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(\lambda) = e^\lambda - \lambda - 1$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$g'(\lambda) = e^\lambda - 1$$

$$g'(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow e^\lambda \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$$

$\lambda$	0	
$g'(\lambda)$	-	+
$g(\lambda)$		

$\min = 0$

$\forall \lambda \neq 0$  είναι  $g(\lambda) > 0$ .

Άρα έχει μοναδική ρίζα την  $\lambda = 0$

**Γ2.** Για  $0 \leq x < 2$  έχουμε:

$$f'(x) = -2 < 0 \Rightarrow f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } [0, 2)$$

Για  $x \geq 2$  έχουμε:

$$f'(x) = -2x + 4 < 0 \quad \forall x > 2 \Rightarrow f \text{ γνησίως φθίνουσα στο } [2, +\infty).$$

Αφού η  $f$  είναι συνεχής στο, προκύπτει ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$ .

Στο  $x_0 = 0$  η  $f$  έχει ολικό μέγιστο το  $f(0) = 5$ .

**Γ3.**

(i) Η  $f$  συνεχής στο  $[0, 3] \subseteq [0, +\infty)$

Η  $f$  παρ/μη στο  $[0, 2)$  και  $(2, 3]$

Στο  $x_0 = 2$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 4 + e^\lambda - 1 - \lambda}{x - 2} \stackrel{(\lambda=0)}{=} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)^2}{x-2} = 0$$

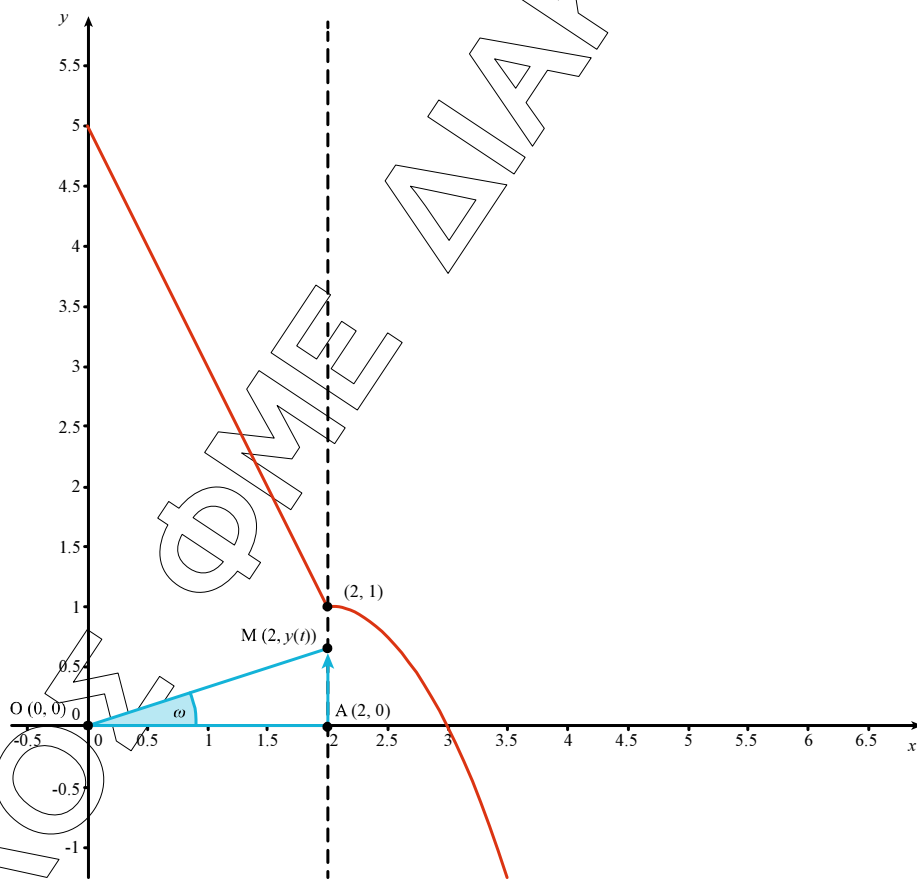
Άρα δεν υπάρχει ο παράγωγος αριθμός  $f'(2)$  και άρα δεν εφαρμόζεται το ΘΜΤ στο  $[0,3]$ .

(ii) Αναζητούμε αν υπάρχει  $\xi \in (0,3)$ :  $f'(\xi) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$

Για  $\xi \in (0,2)$  πρέπει  $-2 = \frac{0 - 5}{3}$  άτοπο

Για  $\xi \in (2,3)$  πρέπει  $-2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow 2\xi = 4 + \frac{5}{3} \Leftrightarrow 2\xi = \frac{17}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6}$ .

Γ4.



$$y'(t) = \frac{1}{2}$$

$$y(t_0) = f(2) = 1$$

$$\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{y(t)}{2} \Rightarrow (\varepsilon\varphi(\omega(t)))' = \frac{1}{2} y'(t) \Leftrightarrow (1 + \varepsilon\varphi^2(\omega(t))) \omega'(t) = \frac{1}{2} y'(t) \Rightarrow$$



$$\begin{aligned} \stackrel{t=t_0}{\Rightarrow} (1 + \varepsilon \varphi^2(\omega(t_0))) \omega'(t_0) &= \frac{1}{2} y'(t_0) \Rightarrow (1 + \frac{1}{4}) \omega'(t_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{4} \omega'(t_0) = \frac{1}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega'(t_0) &= \frac{1}{5} \text{ rad/sec.} \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{\ln x + ax}{x}, \quad x > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{με } f((0, +\infty)) = (-\infty, 1 + \frac{1}{e}]$$

Δ1.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\frac{1}{x} + a)x - (\ln x + ax)}{x^2} = \frac{1 + ax - \ln x - ax}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad x > 0 \\ f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq e \end{aligned}$$

$x$	$0$	$e$
$f'(x)$	$=$	$=$
	+	-
$f(x)$	$=$	$=$
		

max

Προκύπτει ότι έχει ολικό μέγιστο στη θέση  $e$ , το  $f(e)$ .

Όμως το σύνολο τιμών της είναι το  $(-\infty, 1 + \frac{1}{e}]$ , άρα:

$$f(e) = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1 + ae}{e} = \frac{e + 1}{e} \Leftrightarrow 1 + ae = e + 1 \Leftrightarrow ae = e \Leftrightarrow a = 1$$

Δ2. Η  $f$  συνεχής στο  $[\frac{1}{2}, 1]$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 \ln \frac{1}{2} + 1 = -2 \ln 2 + 1 < 0$$

(διότι  $-2 \ln 2 + 1 < 0 \Leftrightarrow 2 \ln 2 > 1 \Leftrightarrow \ln 2 > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln 2 > \ln \sqrt{e} \Leftrightarrow 2 > \sqrt{e}$  που

ισχύει)

$$f(1) = \frac{\ln 1 + 1}{1} = 1 > 0$$

$$\text{Άρα } f(1) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει  $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \subseteq (0, e]$  ώστε  $f(x_0) = 0$ , το οποίο είναι μοναδικό στο  $(0, e]$ , αφού  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, e]$ .

$$f([e, +\infty)) \stackrel{f \text{ γν. φθίν.}}{=} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e)\right) = \left(1, \frac{1}{e} + 1\right]$$

Προκύπτει ότι  $0 \notin f([e, +\infty))$  άρα ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ρίζα της  $f(x) = 0$  στο  $[e, +\infty)$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x^{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}}{x} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{1} = 1$$

**Δ3. i)**  $f(x) = f(4)$

Προφανείς ρίζες  $x_1 = 2, x_2 = 4$  οι οποίες είναι μοναδικές αφού  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $(0, e]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[e, +\infty)$ .

**ii)**  $2^x \leq x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \leq \ln x^2 \Leftrightarrow x \ln 2 \leq 2 \ln x \Leftrightarrow$

$$\frac{\ln x}{x} \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} + 1 \geq \frac{\ln 2}{2} + 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(2)$$

Για  $x \in (0, e]$  η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα οπότε  $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow x \geq 2 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq e$

Για  $x \in (e, +\infty)$  η  $f(x)$  είναι γνησίως φθίνουσα οπότε

$$f(x) \geq f(2) = f(4) \Leftrightarrow f(x) \geq f(4) \Leftrightarrow x \leq 4 \Leftrightarrow e < x \leq 4.$$

Τελικά  $x \in [2, 4]$ .

**Δ4.**  $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}$

$$E = \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \frac{1-x}{e^x} \right| dx$$

$$\text{Θέτουμε } u = e^x \Rightarrow x = \ln u \Rightarrow dx = \frac{1}{u} du$$

$$\text{Για } x = -\ln 2 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Για } x = 0 \Rightarrow u_2 = 1$$

$$\text{Άρα } E = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| f(u) \frac{1 - \ln u}{u} \right| du$$

Έχουμε  $\frac{1-\ln u}{u} > 0 \forall u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , οπότε  $E = \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(u)| \frac{1-\ln u}{u} \cdot \frac{1}{u} du =$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} |f(u)| \frac{1-\ln u}{u^2} du + \int_{x_0}^1 |f(u)| \frac{1-\ln u}{u^2} du$$

Αν  $x \in \left[\frac{1}{2}, x_0\right]$  <sup>f γν.αυξ.</sup>  $\Rightarrow f(x) \leq f(x_0) = 0$

Αν  $x \in [x_0, 1]$  <sup>f γν.αυξ.</sup>  $\Rightarrow f(x) \geq f(x_0) = 0$

Άρα  $E = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u) \frac{1-\ln u}{u^2} du + \int_{x_0}^1 f(u) \frac{1-\ln u}{u^2} du$

Όμως  $f'(u) = \frac{1-\ln u}{u^2}$  οπότε

$$E = \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} -f(u)f'(u) du + \int_{x_0}^1 f(u)f'(u) du =$$

$$\left[-\frac{1}{2}f^2(u)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[-\frac{1}{2}f^2(u)\right]_{x_0}^1 =$$

$$-\frac{1}{2}f^2(x_0) + \frac{1}{2}f^2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f^2(1) - \frac{1}{2}f^2(x_0) =$$

$$= \frac{1}{2}(-2\ln 2 + 1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{(1-\ln 4)^2}{2} + \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$