# ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
# ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
# 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση $f$ ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η $f$ είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του Δ,

να αποδείξετε ότι η $f$ είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

**Μονάδες 6**

**Α2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 5**

**Α3.** Έστω $f$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της $f$ στο Δ;

**Μονάδες 4**

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι “1–1”, αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

**β)** Αν μια συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0$ του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**γ)** Έστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x$ του Δ , τότε η $f$ είναι κυρτή στο Δ.

**δ)** Αν η συνάρτηση $g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$ και ισχύει

$$\left(f\circ g\right)'(x_0)=f'\big(g(x_0)\big)\cdot g'(x_0).$$

**ε)** Η συνάρτηση $f(x)=\text{σφ}x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}-\{x\mid \text{ημ}x=0\}$ και ισχύει $\left(\text{σφ}x\right)'=\dfrac{1}{\text{ημ}^2x}$.

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x)=2\ln(x-1)$$

και

$$g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x)=\sqrt{x-2}+1.$$

**Β1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

**Μονάδες 8**

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $h(x)=\ln(x-2),\ x\in(2,+\infty)$.

**Β2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h$ αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h^{-1}$ (μονάδες 6).

**Μονάδες 9**

**Β3.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)$.

**Μονάδες 8**

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$$

με $\kappa,\mu\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η $f$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $f$ στην αρχή των αξόνων.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

**i)** $\kappa=0$ και

**ii)** $\mu=1$.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 6).

**ii)** Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της $f$ είναι το $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ (μονάδες 3) και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\dfrac{1}{2}+\alpha^2$, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha\in\mathbb{R}$ (μονάδες 2).

**Μονάδες 11**

**Γ3.** Για $\nu \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

**i)** Να αποδείξετε ότι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$, $\nu \in \mathbb{N}$.

**ii)** Να υπολογίσετε τα $I_0$, $I_1$, και $I_2$.

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0.$$

**Μονάδες 6**

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(g(x)+x\right),\ (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με $\kappa \in \mathbb{R}$.

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι κ = 3.

**Μονάδες 2**

**Δ3.** Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν:

**i)** $f(x) \geq 0$ και (μονάδες 4)

**ii)** η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μια ρίζα, $x_2$. (μονάδες 3)

**Μονάδες 7**

**Δ4.** **i)** Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$. (μονάδες 3)

**ii)** Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2)$, όπου $x_1$ είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και $x_2$ είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$I\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\mathrm{d}x = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3.$$

(Μονάδες 7)

**Μονάδες 10**