ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

● η f είναι συνεχής στο Δ και

● $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

Πράγματι

● Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.

● Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

Σε όλες λοιπόν τις περιπτώσεις, είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. ΘΕΩΡΗΜΑ
Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν

- $\mathrm{h(x) \le f(x) \le g(x)}$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$
-

$Τότε\ \lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$.

Α3. ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει: $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in Δ$.

Α4. **α)** Λ, **β)** Σ, **γ)** Σ, **δ)** Σ, **ε)** Λ

ΘΕΜΑ Β

$f(x) = 2\ln(x-1)$, $g(x) = \sqrt{x-2}+1$

Β1. $D_f = (1,+\infty) D_g = [2,+\infty)$

Πρέπει $x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$, άρα :

$x \in [2,+\infty)\ και \qquad \sqrt{x-2}+1 \in (1,+\infty)$

Δηλαδή $x \ge 2$ και $\left(\sqrt{x-2}+1 > 1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2} > 0 \Leftrightarrow x > 2\right)$

άρα $D_{fog} = (2,+\infty)$.

$(fog)(x) = f(g(x)) = 2\ln(g(x)-1) = 2\ln\left(\sqrt{x-2}+1-1\right) =$

$= 2\ln\sqrt{x-2} = 2\ln(x-2)^{\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}\ln(x-2)$.

Άρα $(fog)(x) = \ln(x-2)$, για $x > 2$

Β2. $h(x) = \ln(x-2), x > 2$

$h'(x) = (\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2} > 0, \forall x > 2$

Έτσι h είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1, επομένως υπάρχει h^{-1}

$$D_{h^{-1}} = ΣΤ_h = h((2,+\infty)) \overset{h\,γν.αύξ.}{=} \left(\lim_{x\to 2^+} h(x), \lim_{x\to+\infty} h(x)\right) = \mathbb{R}$$

$=\mathbb{R}$

αφού

- $\lim\limits_{x\to 2^+} ln(x-2) \overset{\substack{u_0=0\\u=x-2}}{=} \lim\limits_{u\to 0} ln\, u = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} ln(x-2) \overset{\substack{u_0=+\infty\\u=x-2}}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} ln\, u = +\infty$

Ισχύει $h(x) = y \Leftrightarrow x = h^{-1}(x)$

Έτσι $h(x) = y$, με $y \in \mathbb{R}$

$$ln(x-2) = y$$

$x - 2 = e^y$

$x = e^y + 2, y \in \mathbb{R}$.

Επομένως $h^{-1}(x) = e^x + 2, x \in \mathbb{R}$.

Β3. $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{2\ln(x-1)}{x-2} \underset{DLH}{\overset{(\frac{0}{0})}{=}} \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \lim_{x\to 2}\frac{2}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\frac{\mathrm{f}(x)}{x-2}\right) = \lim_{x\to 2}h(x)\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\mathrm{f}(x)}{x-2} = (-\infty)\cdot 2 = -\infty$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\boldsymbol{f: R \to R \ \ f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2+1}}$

Αφού f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ πρέπει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in R$

Αν κ ≠ 0 : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\kappa x$.

- Αν κ > 0 τότε : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\kappa x = +\infty$, άτοπο.
- Αν κ < 0 τότε : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\kappa x = -\infty$, άτοπο.

Άρα είναι κ = 0 , οπότε είναι $f(x) = \frac{\mu x}{x^2+1}$.

$$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = \left(\frac{\mu\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2+1}\right)' = \frac{\mu\cdot(\mathrm{x}^2+1) - \mu\mathrm{x}(2\mathrm{x})}{(\mathrm{x}^2+1)^2} = \frac{\mu\mathrm{x}^2 + \mu - 2\mu\mathrm{x}^2}{(\mathrm{x}^2+1)^2} = \frac{-\mu\mathrm{x}^2+\mu}{(\mathrm{x}^2+1)^2}$$

Αφού y=x εφαπτομένη της Cf στο 0 (0,0) πρέπει:

$f'(0) = 1 \Rightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Rightarrow \mu = 1.$

Γ2.

Έχουμε $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, D_f = \mathbb{R}$

i) $f'(x) = \frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \pm 1$

x	$-\infty$	-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	
f	↘		↗		↘	

- Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ η f είναι γν. φθίνουσα.
- Στο διάστημα $[-1,1]$, f είναι γν. αύξουσα.
  - **στο** $x_1 = -1$ **τ. ελάχιστο** $f(-1) = -\frac{1}{2}$
  - **στο** $x_2 = 1$ **τ. μέγιστο** $f(1) = \frac{1}{2}$

ii) Έστω $\Delta_1 = (-\infty, -1], \Delta_2 = (-1, 1], \Delta_3 = (1, +\infty)$

- $f(\Delta_1) = f\big((-\infty, -1]\big) \overset{f\text{γν.φθ.}}{=} [f(-1), \lim_{x\to-\infty} f(x)\big) = [-\frac{1}{2}, 0\big)$
- $f(\Delta_2) = f((-1, 1]) \overset{f\text{γν.αύξ.}}{=} (\lim_{x\to-1} f(x), f(1)] = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$
- $f(\Delta_3) = f(1, +\infty) \overset{f\text{γν.φθ.}}{=} \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to1^+} f(x)\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right)$

Άρα $\Sigma.T.f = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

iii) $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2, \alpha \in \mathbb{R}$:

Αφού $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

- $\alpha^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_1)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο Δ_1.
- $\alpha^2 + \frac{1}{2} \in f(\Delta_2)$ (για α = 0) άρα η εξίσωση έχει 1 μόνο ρίζα στο Δ_2 την x = 1 (αφού f γν. αύξουσα στο Δ_2).
- $\alpha^2 + \frac{1}{2} \notin f(\Delta_3)$ άρα η εξίσωση ΔΕΝ έχει ρίζα στο Δ_3.

Επομένως η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχει 1 ΜΟΝΟ ρίζα την $x = 1$.

Γ3. $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,\mathrm{dx}$

i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,\mathrm{dx} + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}\,\mathrm{dx} =$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1} + x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,\mathrm{dx} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int_0^1 x^{2\nu+1}\mathrm{dx} = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2} - 0 \Rightarrow$$

$$I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}\,(1)$$

ii) $I_0 \overset{\nu=0}{=} \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx \overset{\substack{du=2xdx \\ u=x^2+1}}{=} \int_1^2 \frac{\frac{1}{2}}{u}\,du =$

$= \frac{1}{2}[ln|u|]_1^2 = \frac{1}{2}(ln\,2 - ln\,1) = \frac{1}{2}ln\,2$

$(1) \xrightarrow{\nu=0} I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}ln\,2 + I_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln\,2$

$I_1 = \frac{1-ln\,2}{2}$

$$(1) \xrightarrow{\nu=1} I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1-ln\,2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1-2+2\,ln\,2}{4} \Rightarrow I_2 = \frac{2\,ln\,2-1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

g παραγωγίσιμη, g΄ συνεχής

$$0 < g(x) < 1 \quad \forall x \in R$$

$$g'(x) \neq 1 \quad \forall x \in R$$

Δ1. Έστω $h(x) = g(x) + x$

Η h(x) συνεχής στο [-1,0] ως άθροισμα συνεχών

$$h(-1) = g(-1) - 1 < 0$$

$$h(0) = g(0) > 0$$

$$h(0) \cdot h(1) < 0$$

Από Θ. Bolzano, υπάρχει $x_1 \in [-1,0): h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x_1) + x_1 = 0$

$$h'(x) = g(x) + 1 \neq 0$$

και h΄ συνεχής, άρα η h΄ διατηρεί πρόσημο.

Άρα η h γνησίως μονότονη, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.

Δ2. $f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} (x(g(x) + x)) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim_{x \to 0^+} (2(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \kappa) =$$

$$= 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa.$$

$$\textit{Άρα} \quad 3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3.$$

Δ3.

Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι : $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$.

Θα δείξουμε ότι $f(x) \geq 0$, στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Πράγματι :

f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 =$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x + 1 - 3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) + (1 - \sigma\upsilon\nu x)(1 + \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 - \sigma\upsilon\nu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot 2 \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1) \cdot (\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{2})}{\sigma\upsilon\nu^2 x} =$$

$= \frac{2(\sigma\upsilon\nu x-1)^2\cdot(\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2})}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \geq 0$ για κάθε $x \in [0,\frac{\pi}{2})$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0.

Άρα f $\gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ [0,\frac{\pi}{2})$

$$\text{Για } x \geq 0 \overset{f\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow} f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

ii) Έχουμε την εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$

$$\Sigma.T._f = f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right) \overset{f\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{=} \left[f(0), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0,+\infty)$$

Αφού

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) = 2\cdot 1 + (+\infty) - \frac{3\pi}{2} = +\infty$$

και αφού $\frac{\pi}{3} \in \Sigma.T.f$ και f γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η εξίσωση $f(x) = \frac{\pi}{3}$ έχει μία μόνο ρίζα, την $x_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Δ4. i) Έστω $h(x) = g(x) + x$.

Τότε $h(0) = g(0) > 0$ και $h(x_1) = g(x_1) + x_1 = 0$

$h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ αφού h' συνεχής. Άρα η $h'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Αν $h'(x) < 0 \Rightarrow h$ γν. φθίνουσα, οπότε

$$x_1 < 0 \overset{h\gamma\nu.\varphi\theta.}{\Rightarrow} h(x_1) > h(0) = g(0) > 0 \Rightarrow 0 > 0. \quad \text{Άτοπο}$$

Άρα $h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γν. αύξουσα. Τότε για $x \in [x_1, 0]$ είναι $x \geq x_1 \overset{h\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Rightarrow}$

$h(x) \geq h(x_1) = 0 \Rightarrow g(x) + x \geq 0$ και αφού $x^2 > 0$ έπεται

$x^2(g(x) + x) \geq 0$ στο $[x_1, 0) \Rightarrow f(x) \geq 0$ στο $[x_1, 0)$.

ii) $E(\Omega) = \int_{x_1}^{f(x_2)} f(x)\,dx$ με $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ και $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left[x_1, \frac{\pi}{3}\right]$.

Άρα $E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ και ισχύει $\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx \quad (1)$

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = [x^3 g(x)]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)\,dx =$$

$$= -x_1^3 g(x_1) - \int_{x_1}^{0} 3\cdot(f(x) - x^3)\,dx = x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} 3x^3\,dx$$

$$= x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx + 3\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx - 3\frac{x_1^4}{4}$$

$$= \frac{x_1^4}{4} - 3\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx \overset{(1)}{=} \frac{x_1^4}{4} - 3\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx.$$

Όμως :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - ln(\sigma\upsilon\nu x) - \frac{3x^2}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2} - ln\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + ln\,2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Άρα $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \frac{x_1^4}{4} - 3\left(1 + ln\,2 - \frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{x_1^4}{4} - 3 - 3\,ln\,2 + \frac{\pi^2}{2}.$