ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(\text{x})$

Έχουμε $F(x+h) - F(x) = cf(x+h) - cf(x) = c\big(f(x+h) - f(x)\big)$, $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left[c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = cf'(x)$

Άρα $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$.

(Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 30)

Α2. Μια συνάρτηση $\boldsymbol{f}$ λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της και συμβολίζεται $f'(x_0)$ αν

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \quad \in \quad$. (Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 22)

Α3. **α) ΛΑΘΟΣ**
β) ΣΩΣΤΟ
γ) ΣΩΣΤΟ
δ) ΛΑΘΟΣ
ε) ΣΩΣΤΟ

ΟΜΙΛΟΣ ΦΜΕ ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + 10$$

Β1. $f'(x) = 6x^2 + 2ax - 12.$

Β2. Αφού η εφαπτομένη της Cf στο $x_0 = 1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ πρέπει:

$$f'(1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 6 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2a = 6$$

$$\Rightarrow \quad a = 3$$

Β3. Για α=3: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 10$

και $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 \geq 0 \Rightarrow 6(x^2 + x - 2) \geq 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = -\dfrac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

Πίνακας Μονοτονίας:

x		-2		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗		↘		↗

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (-\infty, -2]$ και για κάθε $x \in [1, +\infty)$

και η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-2, 1]$.

ΟΜΙΛΟΣ ΦΜΕ ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = -2$

το

$$f(-2) = 2\cdot(-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 - 12\cdot(-2) + 10$$
$$\Rightarrow f(-2) = 2\cdot(-8) + 3\cdot 4 + 24 + 10$$
$$\Rightarrow f(-2) = -16 + 12 + 34$$
$$\Rightarrow f(-2) = 30$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 = 1$

το $f(1) = 2\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 12\cdot 1 + 10 \Rightarrow f(1) = 3$.

Β4. Για α=3

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{6x^2+6x-12}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{6(x^2+x-2)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{6(x-1)\cdot(x+2)}{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to 1} 6\cdot(x+2) = 6\cdot(1+2) = 6\cdot 3 = 18$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ισχύει $\overline{x} = 14$, $x_3 = 18$ και $x_4 = 22$

$$\Rightarrow \frac{\sum_{i-1}^{4} x_i v_i}{v} = 14$$
$$\Rightarrow \frac{x_1\cdot v_1 + x_2\cdot v_2 + x_3\cdot v_3 + x_4\cdot v_4}{v} = 14$$
$$\Rightarrow \frac{200 + 210 + 18\cdot v_3 + 22\cdot 5}{v} = 14$$
$$\overset{\cdot v}{\Rightarrow} 200 + 210 + 18\cdot v_3 + 110 = 14v$$
$$\Rightarrow 18\cdot v_3 + 520 = 14v$$
$$\overset{\div 2}{\Rightarrow} 9\cdot v_3 + 260 = 7v \quad (1)$$

Επίσης:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v$$
$$\Rightarrow \quad 20 + 15 + v_3 + 5 = v$$
$$\Rightarrow \quad v_3 + 40 = v \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow 9v_3 + 260 = 7\cdot(v_3 + 40)$

$\Rightarrow 9v_3 + 260 = 7v_3 + 280$

$\Rightarrow 2v_3 = 20 \Rightarrow v_3 = \frac{20}{2} \Rightarrow \boxed{v_3 = 10}$

ΟΜΙΛΟΣ ΦΜΕ ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Γ2.

κλάσεις [,)	x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$
[8, 12)	10	20	200
[12, 16)	14	15	210
[16, 20)	18	10	180
[20, 24)	22	5	110
	Σύνολο	50	700

$$x_3 = \frac{16+20}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$x_4 = \frac{20+24}{2} = \frac{44}{2} = 22$$

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 20 + 15 + 10 + 5 = 50$$

$$x_3 \cdot v_3 = 18 \cdot 10 = 180$$

$$x_4 \cdot v_4 = 22 \cdot 5 = 110$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \cdot v_i = 200 + 210 + 180 + 110 = 700$$

Γ3. $s^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^{4} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \cdot v_i$

$$= \frac{1}{50} \cdot \left[(10-14)^2 \cdot 20 + (14-14)^2 \cdot 15 + (18-14)^2 \cdot 10 + (22-14)^2 \cdot 5\right]$$

$$= \frac{1}{50} \cdot (320 + 0 + 160 + 320)$$

$$= \frac{1}{50} \cdot 800 = \frac{80}{5} = 16$$

Γ4. $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{|14|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

$\left(s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4\right)$

Έστω ότι το δείγμα είναι ομοιογενές

Τότε $CV < 10\%$

$$\Rightarrow \frac{2}{7} < \frac{10}{100} \Rightarrow \frac{2}{7} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 10 < 7 \cdot 1$$

$\Rightarrow 20 < 7$ <u>Αδύνατο</u>

Άρα η αρχική υπόθεση δεν ισχύει, δηλαδή το δείγμα <u>ΔΕΝ</u> είναι ομοιογενές.

ΟΜΙΛΟΣ ΦΜΕ ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Δεύτερος τρόπος επίλυσης:

CV= $\frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{|14|} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \simeq 0,29$

Δηλαδή CV   29% > 10 %

Άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

$f(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$

Δ1) Η f συνεχής ως ρητή και παραγωγίσιμη για κάθε $x \in {}^{*}$

$f'(x) = -(-\frac{1}{x^4}) \cdot 2x = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$

Για x < 0: $f'(x) < 0$
Για x > 0: $f'(x) > 0$

x		0	
f'	−	‖	+
f	↘	‖	↗

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in (-\infty, 0)$
και η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Δ2) Για $x \in [-4, -1]$ έστω ότι ισχύει $-1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{16}$.

Επειδή $f(-1) = -1$ και $f(-4) = -\frac{1}{16}$

$\Rightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f(-4)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα για κάθε $x \in [-4, -1]$ οπότε
$-1 \geq x \geq -4 \Rightarrow -4 \leq x \leq -1$, που ισχύει.

ΟΜΙΛΟΣ ΦΜΕ ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Δ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(1, f(1))$ είναι:

$y = f'(x_0)x + \beta$, όπου $x_0 = 1$ και

$f'(1) = \frac{2}{1^3} = 2$ και $f(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

Άρα (ε): $y = 2x + \beta$.

$M(1, -1) \in (\varepsilon) \Rightarrow -1 = 2 \cdot 1 + \beta \Rightarrow \beta = -3$.

Άρα (ε): $y = 2x - 3$

Δ4. Έχουμε: $A \in (\varepsilon) \Rightarrow y_1 = 2x_1 - 3$

$B \in (\varepsilon) \Rightarrow y_2 = 2x_2 - 3$

$\Gamma \in (\varepsilon) \Rightarrow y_3 = 2x_3 - 3$

Είναι: $\overline{y} = 2\overline{x} - 3 \Rightarrow \overline{y} = 2 \cdot 4 - 3 \Rightarrow \overline{y} = 5$ και

$s_y = |2| \cdot s_x \Rightarrow s_y = 2 \cdot 2 \Rightarrow s_y = 4$

Άρα $CV_y = \frac{s_y}{|\overline{y}|} = \frac{4}{|5|} = \frac{4}{5} \underset{\cdot 20}{\overset{\cdot 20}{=}} \frac{80}{100} = 80\,\%$.

ΟΜΙΛΟΣ ΦΜΕ ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ