

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023**  
**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

**Μονάδες 6**

- A2.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

**Μονάδες 5**

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ .

- β)** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

- γ)** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , ισχύει ότι  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ .

- δ)** Αν η  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια «ένα προς ένα» ("1-1") συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

- ε)** Αν  $f, g$  είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$  και η συνάρτηση  $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $h(x) = \ln x$ .

**B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $f = goh$

Μονάδες 5

Έστω  $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$

**B2. i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

**ii)** Να αποδείξετε ότι  $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$  (μονάδες 4).

Μονάδες 8

**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες 6

**B4.** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(1 + x^2)}{f(x)}$ .

Μονάδες 6

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + a, & x \geq 1 \end{cases}$$

όπου  $a \in \mathbb{R}$ , για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x f(x) dx = 1$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $a = 0$ .

Μονάδες 4

**Γ2. i)** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$  (μονάδες 4).

**ii)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ( $\varepsilon$ ) και τη γωνία που σχηματίζει η ( $\varepsilon$ ) με τον άξονα  $x'x$  (μονάδες 4).

Μονάδες 8

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι «ένα προς ένα» ("1-1") (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

- Γ4.** Έστω  $(\varepsilon): y = -x + 2$  η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  με  $x \geq 1$ , την ευθεία  $(\varepsilon)$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = e$ .

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση  $f: (0, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x-1} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 3$ .

**Μονάδες 4**

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς δύο ρίζες  $x_1, x_2$  με  $x_1 < 1 < x_2$  (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $x_1 < \frac{1}{3}$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 6**

Στα παρακάτω ερωτήματα,  $x_1$  και  $x_2$  είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο  $M(\xi, f(\xi))$ , με  $\xi \in (0, 1)$ , στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

**Μονάδες 6**

- Δ4.** Αν επιπλέον  $F$  και  $G$  είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $(0, 2)$  με  $F(x_1) = G(x_2) = 0$ , να αποδείξετε ότι:

**i)**  $F(x_2) + G(x_1) = 0$

(μονάδες 4)

**ii)** η εξίσωση

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $(x_1, x_2)$ .

(μονάδες 5)

**Μονάδες 9**