ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)
3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη (σελ.93 σχολικού βιβλίου).

Ο αριθμός όμως αυτός είναι ίσος με μηδέν, αφού

$$\frac{\left(t_1-\overline{x}\right)+\left(t_2-\overline{x}\right)+....\left(t_\nu-\overline{x}\right)}{\nu}=\frac{t_1+t_2+...+t_\nu}{\nu}-\frac{\nu\overline{x}}{\nu}=\overline{x}-\overline{x}=0.$$

Α2. Ορισμός (Σχολικό σελ 16)
Γενικά μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Α3.

α. Λάθος
β. Σωστό
γ. Σωστό
δ. Σωστό
ε. Λάθος

Α4.

α. $(c)'=0$

β. $\left(x^2\right)'=2x$

ΘΕΜΑ Β

Πλήθος ωρών x_i	Συχνότητα ν_i	f_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i \cdot \nu_i$
0	10	0,20	20	10	0
1	15	0,30	30	25	15
2	11	0,22	22	36	22
3	8	0,16	16	44	24
4	6	0,12	12	50	24
Σύνολο	50	1	100		85

Β1. $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5=\nu \Leftrightarrow \nu_1+15+11+8+6=50 \Leftrightarrow \nu_1=50-40=10$

Β2. $\overline{x}=\dfrac{1}{50}\cdot\sum_{i=1}^{5}x_i\cdot\nu_i=\dfrac{1}{50}\cdot 85=\dfrac{170}{100}$ Άρα $\overline{x}=1,7$

Β3. Αφού το πλήθος είναι άρτιος αριθμός η διάμεσος ισούται με το ημιάθροισμά των δύο μεσαίων παρατηρήσεων.

$\dfrac{\nu}{2}=\dfrac{50}{2}=25^{\eta}$

$\dfrac{\nu}{2}+1=25+1=26^{\eta}$

Έτσι : $\delta=\dfrac{t_{25}+t_{26}}{2}=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow\delta=1,5$

Β4. α) Το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται υπερωριακά το πολύ 3 ώρες είναι:

$f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%=20+30+22+16=88\%$

β) Έστω y_i οι νέες ώρες

$y_i=x_i+4,\quad \mathrm{i}=1,\,2,\,3,4,5$

οπότε: $\overline{y}=\overline{x}+4=1,7+4\Leftrightarrow\overline{y}=5,7$

ΘΕΜΑ Γ

Έχω $f(x) = -2x^3 + 6x^2 + a, \quad x \in \mathbb{R}$

Γ1. $f'(x) = \left(-2x^3 + 6x^2 + \alpha\right)' = -6x^2 + 12x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow -6x \cdot (x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$

x	$-\infty$	1		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
f	↘		↗		↘

Για $x \in (-\infty, 0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x \in [0, 2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x \in (2, +\infty]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ2. Στο $x_1 = 0$ η f έχει τοπικό ελάχιστο το $f(0) = \alpha$

Στο $x_2 = 2$ η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(2) = \alpha + 8$

Αφού $\dfrac{f(0) + f(2)}{2} = -8 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha + \alpha + 8}{2} = -8 \Leftrightarrow \dfrac{2\alpha + 8}{2} = -8 \Leftrightarrow \alpha + 4 = -8 \Leftrightarrow \alpha = -12$

Γ3. Έστω ε: $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης, τότε ισχύει:

$\lambda = f'(1) = -6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 \Rightarrow \lambda = 6$

Έτσι έχω ε: $y = 6x + \beta$

Αφού $\mathrm{M}(1, f(1)) \in C_f$ ισχύει $f(1) = 6 \cdot 1 + \beta \Rightarrow -8 = 6 + \beta \Rightarrow \beta = -14$

Επομένως ε: $y = 6x - 14$.

Γ4. Για $x \in [2, +\infty)$ έχω f γνησίως φθίνουσα, έτσι

για $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \leq f(2) \Rightarrow -2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4 \Rightarrow -2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0 \overset{:(-2)}{\Rightarrow} x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$.

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\lambda x^2+7x+\frac{2}{3}, \quad x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=x^2+2\lambda x+7$

Δ1. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0 \Leftrightarrow f'(1)=0 \Leftrightarrow 1^2+2\lambda\cdot 1+7=0 \Leftrightarrow 2\lambda=-8 \Leftrightarrow \lambda=-4$

Άρα: $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+7x+\frac{2}{3}$

$f'(x)=x^2-8x+7$

$f''(x)=2x-8$

Δ2. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-8x+7=0$

$\Delta=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 7=64-28=36$

Άρα $x_{1,2}=\frac{8\pm 6}{2}$. Επομένως $x_1=\frac{8+6}{2}=7$ και $x_2=\frac{8-6}{2}=1$.

x	$-\infty$	1	7	$+\infty$
x^2-8x+7	+	0 −	0 +	
$f'(x)$	+	0 −	0 +	
f	↗	↘	↗	

Για $x\in(-\infty,1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Για $x\in[1,7]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Για $x\in[7,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.

Δ3.

Έχω 2020, 2025 $\in[7,+\infty)$ με

$$2020<2025 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} f(2020)<f(2025) \Leftrightarrow f(2025)-f(2020)>0$$

Έχω $\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\in[1,7]$ με $\frac{3}{2}<\frac{5}{2} \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}{\Leftrightarrow} f(\frac{3}{2})>f(\frac{5}{2}) \Leftrightarrow f(\frac{3}{2})-f(\frac{5}{2})>0$

Οπότε: $\mathrm{A}=\dfrac{f(2025)-f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right)-f\left(\frac{5}{2}\right)}>0$

Δ4. Έχω $f''(x)=2x-7,\quad x\in\mathbb{R},$ οπότε:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f'(x)-f''(x)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-(2x-8)+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8x+7-2x+8+1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-10x+16}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{3}\right)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{3}^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{x+1-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}(x-8)\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})=(2-8)\cdot(\sqrt{2+1}+\sqrt{3})=-6\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{3})=-6\cdot 2\sqrt{3}=-12\sqrt{3}\,.$$