

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025**  
**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και
- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή  $G(x) = F(x) + c$ , για κάποιο  $c \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**A2.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

**Μονάδες 5**

**A3.** Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Έστω  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση η οποία είναι "1-1". Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης,  $f^{-1}$ , της  $f$  είναι το σύνολο τιμών της  $f$ .

**β)** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $h \circ (g \circ f)$ , τότε ορίζεται και η  $(h \circ g) \circ f$  και ισχύει  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ .

**γ)** Αν  $v \in \mathbb{N}^*$ , ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v}} = -\infty$ .

**δ)** Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  σε κάθε σημείο του  $\Delta$  βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

**ε)** Αν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $g(x_0)$ , τότε η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ .

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$ , όπου  $a \in \mathbb{R}$ . Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x_0 = 1$ .

**B1.** Να βρείτε την τιμή του  $a$ .

**Μονάδες 5**

Στα ερωτήματα **B2** έως **B4** να θεωρήσετε ότι  $a = -6$ .

**B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

**Μονάδες 10**

**B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

**Μονάδες 6**

**B4.** Έστω  $g(x) = x + f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αν  $\xi \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  στα σημεία  $A(\xi, f(\xi))$  και  $B(\xi, g(\xi))$ , αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα  $y'y$ .

**Μονάδες 4**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x, & x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει την ευθεία  $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $\xi \in (-\pi, 0)$ .

**Μονάδες 5**

- Γ4.** Ένα κινητό  $M$  ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = f(x)$ ,  $x \geq 0$ , ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $x$  του  $M$ ,  $x'(t)$ , να είναι θετικός για κάθε  $t \geq 0$ . Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή  $t_0 \geq 0$  τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y$  του  $M$  να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης  $x$  του  $M$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  και μια παράγουσα,  $F$ , της  $f$  στο  $(0, +\infty)$  για τις οποίες ισχύει ότι:

$$x f(x) = 2F(x) \ln x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $M(1, f(1))$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $(\varepsilon): y = 2x$ .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$ ,  $x > 0$ , είναι σταθερή.

**Μονάδες 6**

- Δ2.** i) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$  (μονάδες 4)  
 ii) Να αποδείξετε ότι  $F(1) = 1$  (μονάδες 3) και  $F(x) = x^{\ln x}$ , για κάθε  $x > 0$  (μονάδες 2).

**Μονάδες 9**

- Δ3.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση  $F$  (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση  $F(x^2) = F(x) - (x - 1)^2$  στο διάστημα  $(0, +\infty)$  (μονάδες 3).

**Μονάδες 5**

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν  $E$  του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $F$ , τις ευθείες  $x = 1$ ,  $x = e$  και τον άξονα  $x$  ισχύει  $E > 2e - 3$ .

**Μονάδες 5**